Doplňující cvičení ke Kapitole XII

Doporučuji všem si rozmyslet úlohy 1–6 a 9. Úlohy 7 a 10 by měly být také pochopitelné pro všechny, úlohy 8 a 11 jsou obtížnější.

Uvažme homogenní diferenční rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0.$$

Nechť χ je její charakteristický polynom. Dokažte následující tvrzení:

1. Pro každé řešení $\{y(n)\}$ této rovnice platí $\lim_{n\to\infty} y(n) = 0$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu (reálný či komplexní) platí $|\lambda| < 1$.
2. Pro každé řešení $\{y(n)\}$ této rovnice existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} y(n)$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu (reálný či komplexní) platí buď $|\lambda| < 1$ nebo $\lambda = 1$, přičemž, je-li 1 kořenem, má násobnost 1.
3. Každé řešení $\{y(n)\}$ této rovnice je omezená posloupnost, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu (reálný či komplexní) platí $|\lambda| \leq 1$ a každý kořen s absolutní hodnotou 1 má násobnost 1.
4. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $|\lambda| < 1$, pak existuje nenulové řešení $\{y(n)\}$, které má limitu 0.
5. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $|\lambda| \leq 1$, pak existuje nenulové řešení $\{y(n)\}$, které je omezené.

Návod: *Použijte větu o tvaru fundamentálního systému a skutečnost, že řešení homogenní rovnice jsou právě lineární kombinace prvků fundamentálního systému.*

Obtížnější úlohy:

6. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou reálné a splňují $|\lambda| \geq 1$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má limitu 0, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Nechť* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *jsou všechny kořeny charakteristického polynomu s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_k$. *Pak víme, že všechna řešení rovnice jsou lineární kombinace posloupností*

$$\{n^j \lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}, \quad 0 \leq j \leq r_i - 1, i = 1, \ldots, k.$$

Vezměme tedy nějakou takovou lineární kombinaci $\{y(n)\}$, *jejíž limita (jako posloupnosti) je nula. Pokud je to triviální lineární kombinace, máme konstantní nulovou posloupnost, takže jsme hotovi. Předpokládejme, že je lineární kombinace netriviální. To znamená, že některé koeficienty jsou nenulové.*

Vezměme i takové, že koeficient u $\{n^j \lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ *je pro nějaké* j *nenulový a přitom* $|\lambda_i|$ *je největší možná. Dále vezměme největší možné* j, *aby koeficient byl nenulový. Pak* $\lim_n \frac{y(n)}{n^j |\lambda_i|^n} = 0$. *Přitom tato limita je rovna koeficientu u* $\{n^j \lambda_i^n\}_{n=1}^{\infty}$ *(v případě, že* $\lambda_i > 0$ *a* $-\lambda_i$ *buď není kořen charakteristického polynomu nebo je koeficient u* $\{n^j (-\lambda_i)^n\}_{n=1}^{\infty}$ *nulový) nebo neexistuje (v ostatních případech). To je spor. (Viz též Cvičení 3 k oddílu IX.1 a návod k řešení.)*

7. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu, která jsou buď reálné nebo mají kladnou imaginární část, jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a splňují
$$1 \leq |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_k|.$$
Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má limitu 0, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Pokud* λ_j *je reálné, máme prvky fundamentálního systému* $\{n^s \lambda_j^n\}$, $0 \leq s \leq r_j - 1$ *(kde* r_j *je násobnost kořenu* λ_j*). Pokud je* λ_j *imaginární, pak* $\lambda_j = |\lambda_j|(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$ *pro nějaké* $\nu_j \in (0, \pi)$, *příslušné prvku fundamentálního systému jsou pak* $\{n^s |\lambda_j|^n \cos n\nu_j\}$ *a* $\{n^s |\lambda_j|^n \sin n\nu_j\}$, $0 \leq s \leq r_j - 1$. *Dále postupujte podobně jako v úloze 6, přičemž použije fakt, že pro* $\nu \in (0, \pi)$ *a* $a, b \in \mathbf{R}$, *přičemž aspoň jedno z čísel* a, b *je nenulové, limita*

$$\lim_{n \to \infty} a \cos n\nu + b \sin n\nu$$

neexistuje.

8. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu splňují $|\lambda| \geq 1$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má limitu 0, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Postupujte podobně jako v úlohách 6 a 7. Je třeba použít tvar fundamentálního systému a to, že pro $\nu_1, \ldots, \nu_k \in (0, \pi)$ různá platí*

$$\lim_{n\to\infty} c + d \cdot (-1)^n + a_1 \cos n\nu_1 + b_1 \sin n\nu_1 + \cdots + a_k \cos n\nu_k + b_k \sin n\nu_k = 0$$

pouze v případě, že

$$c = d = a_1 = b_1 = \cdots = a_k = b_k = 0.$$

9. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou reálné a splňují $|\lambda| > 1$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 6. Příslušná limita je opět 0 – omezená posloupnost dělená posloupností s limitou $+\infty$.*

10. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu, která jsou buď reálné nebo mají kladnou imaginární část, jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a splňují
$$1 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \cdots < |\lambda_k|.$$
Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 7.*

11. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu splňují $|\lambda| > 1$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené, je konstantní nulová posloupnost.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 8.*