Doplňující cvičení ke Kapitole XV

Uvažujme rovnici

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (*),$$

kde p, q jsou funkce spojité na intervalu (a, b).

Rovněž uvažujme homogenní rovnici

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (**).$$

1. Nechť funkce p, q jsou třídy C^k na intervalu (a, b) (kde $k \in \mathbf{N}$). Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^{k+1}.

2. Nechť funkce p, q jsou třídy C^∞ na intervalu (a, b). Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^∞.

Návod: *V úloze 1 postupujte matematickou indukcí podle k stejným způsobem, jakým se dokáže, že každé řešení rovnice* $(*)$ *je třídy* C^1*. Úloha 2 plyne z úlohy 1.*

3. Ukažte, že každé řešení rovnice $(**)$ je buď konstantní nulové, nebo všude kladné, nebo všude záporné.

4. Nechť y je kladné řešení rovnice $(**)$. Vyjádřete intervaly monotonie funkce y pomocí znaménka funkce p.

5. Stejnou úlohu řešte pro záporná řešení rovnice $(**)$.

Návod: *V úloze 3 použijte metodu řešení, případně přímo tvar řešení. V úlohách 4 a 5 využijte větu o vztahu znaménka derivace a monotonie a buď přímo tvar řešení nebo vyjádření* $y'(x) = -p(x)y(x)$.

Definujme funkci $\Phi : (a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b) \to \mathbf{R}$ tak, že pro každé $x_0 \in (a,b)$ a každé $y_0 \in \mathbf{R}$ je funkce

$$y(x) = \Phi(x_0, y_0, x), \quad x \in (a,b)$$

řešením rovnice $(*)$ splňujícím počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Proměnné této funkce budeme značit po řadě x_0, y_0, x.

6. Ukažte, že funkce Φ je spojitá na $(a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b)$.

7. Ukažte, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0, y_0, x) = q(x) - p(x)\Phi(x_0, y_0, x), \quad [x_0, y_0, x] \in (a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b).$$

8. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial y_0}(x_0, y_0, x)$.

9. Spočtěte $\frac{\partial \Phi}{\partial x_0}(x_0, y_0, x)$.

10. Ukažte, že funkce Φ je třídy C^1 na $(a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b)$.

11. Nechť funkce p a q jsou třídy C^k na (a,b) (kde $k \in \mathbf{N}$). Ukažte, že funkce Φ je třídy C^{k+1} na $(a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b)$.

12. Nechť funkce p a q jsou třídy C^∞ na (a,b). Ukažte, že funkce Φ je třídy C^∞ na $(a,b) \times \mathbf{R} \times (a,b)$.

Návod: *Použijte vzorec pro funkci Φ odvozený v rámci metody řešení lineárních rovnic prvního řádu. Dále použijte, že pro spojitou funkci f na intervalu (a,b) existuje primitivní funkce F na (a,b) a pro každé $u, v \in (a,b)$ platí $\int_u^v f = F(v) - F(u)$. S pomocí těchto faktů dokažte úlohu 6, s použitím běžných pravidel derivování pak i úlohy 8 a 9. Pro řešení úlohy 7 využijte definici funkce Φ výše a toho, co znamená řešení.*

Úlohu 10 dokažte s použitím úloh 6–9. Úlohu 11 pak matematickou indukcí podle k s použitím úloh 7–9, s tím, že první krok (pro $k = 0$) dává úloha 10. Úloha 12 pak plyne z úlohy 11.