Doplňující cvičení ke Kapitole XVI

Uvažujme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{$*$}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na intervalu (a, b).

Kromě toho uvažujme homogenní rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$**$}$$

a nechť χ je charakteristický polynom této rovnice, tj.

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

1. Ukažte, že každé řešení rovnice $(**)$ je třídy C^∞.

2. Nechť f je funkce třídy C^k na intervalu (a, b) (kde $k \in \mathbf{N}$). Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^{n+k}.

3. Nechť f je funkce třídy C^∞ na intervalu (a, b). Ukažte, že každé řešení rovnice $(*)$ je třídy C^∞.

Návod. *Víme již, že každé řešení je třídy C^n. Úloha 1 se dokáže indukcí ze vzorce $y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y$ a je též speciálním případem úlohy 3. Úloha 2 se dokáže indukcí podle k ze vzorce $y^{(n)} = f(t) - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y$, úloha 3 pak plyne z úlohy 2.*

Úlohy o limitním chování maximálních řešení homogenní rovnice

Dokažte následující tvrzení (řešením v následujících úlohách rozumíme maximální řešení):

4. Pro každé řešení y rovnice $(**)$ platí $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

5. Pro každé řešení y této rovnice existuje vlastní limita $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí buď $\operatorname{Re}\lambda < 0$ nebo $\lambda = 0$, přičemž, je-li 0 kořenem, má násobnost 1.

6. Pro každé řešení y rovnice $(**)$ platí $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

7. Pro každé řešení y rovnice $(**)$ existuje vlastní limita $\lim_{t\to-\infty} y(t)$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí buď $\operatorname{Re}\lambda > 0$ nebo $\lambda = 0$, přičemž, je-li 0 kořenem, má násobnost 1.

8. Nemůže se stát, aby pro každé řešení y rovnice $(**)$ platilo $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$.

9. Pro každé řešení y rovnice $(**)$ existuje vlastní limita $\lim_{t\to-\infty} y(t)$ a také vlastní limita $\lim_{t\to+\infty} y(t)$, právě když rovnice má tvar $y' = 0$ (tj. $n = 1$ a $a_0 = 0$).

10. Každé řešení y rovnice $(**)$ je omezené na $\langle 0, +\infty)$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ a každý kořen s nulovou reálnou částí má násobnost 1.

11. Každé řešení y rovnice $(**)$ je omezené na $(-\infty, 0\rangle$, právě když pro každý kořen λ charakteristického polynomu platí $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ a každý kořen s nulovou reálnou částí má násobnost 1.

12. Každé řešení y rovnice $(**)$ je omezené na $\mathbf{R}$, právě když všechny kořeny charakteristického polynomu leží na imaginární ose a mají násobnost 1.

13. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $\operatorname{Re}\lambda < 0$, pak existuje nenulové řešení y, které má v $+\infty$ limitu 0.

14. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $\operatorname{Re}\lambda > 0$, pak existuje nenulové řešení y, které má v $-\infty$ limitu 0.

15. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, pak existuje nenulové řešení y, které je omezené na $\langle 0, +\infty)$.

16. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$, pak existuje nenulové řešení y, které je omezené na $(-\infty, 0\rangle$.

17. Pokud existuje aspoň jeden kořen λ charakteristického polynomu splňující $\operatorname{Re}\lambda = 0$, pak existuje nenulové řešení y, které je omezené na $\mathbf{R}$.

Návod: *Maximální řešení jsou právě lineární kombinace prvků fundamentálního systému. Použijte tedy tvar fundamentálního systému z Věty XVI.4 a znalost limitního chování elementárních funkcí (exponenciály, polynomů, goniometrických funkcí).*

Obtížnější úlohy o limitním chování (pro zájemce):

18. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou reálné a nezáporné. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má v $+\infty$ limitu 0, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ jsou všechny kořeny charakteristického polynomu s násobnostmi $r_1, \ldots, r_k$. Pak víme, že všechna řešení rovnice jsou lineární kombinace funkcí*

$$t^j e^{\lambda_i t}, \quad 0 \leq j \leq r_i - 1, i = 1, \ldots, k.$$

Vezměme tedy nějakou takovou lineární kombinaci y, jejíž limita v $+\infty$ je nula. Pokud je to triviální lineární kombinace, máme konstantní nulovou funkci, takže jsme hotovi. Předpokládejme, že je lineární kombinace netriviální. To znamená, že některé koeficienty jsou nenulové.

Vezměme i takové, že koeficient u $t^j e^{\lambda_i t}$ je pro nějaké j nenulový a přitom λ_i je největší možná. Dále vezměme největší možné j, aby koeficient byl nenulový. Pak $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{t^j e^{\lambda_i t}} = 0$. Přitom tato limita je rovna koefientu u $t^j e^{\lambda_i t}$ To je spor. (Viz též Cvičení 6 a 7 k oddílu IX.1 a návod k řešení.)

19. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu, která jsou buď reálné nebo mají kladnou imaginární část, jsou $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ a splňují

$$0 \leq \operatorname{Re} \lambda_1 < \operatorname{Re} \lambda_2 < \cdots < \operatorname{Re} \lambda_k.$$

Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má v $+\infty$ limitu 0, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Pokud λ_j je reálné, máme prvky fundamentálního systému $t^s e^{\lambda_j t}$, $0 \leq s \leq r_j - 1$ (kde r_j je násobnost kořenu λ_j). Pokud je λ_j imaginární, pak $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ pro nějaké $\alpha_j \in \mathbf{R}, \beta_j \in (0, +\infty)$, příslušné prvky fundamentálního systému jsou pak $t^s e^{\alpha_j t} \cos \beta_j t$ a $t^s e^{\alpha_j t} \sin \beta_j t$, $0 \leq s \leq r_j - 1$. Dále postupujte podobně jako v úloze 18, přičemž použije fakt, že pro $\beta \in (0, +\infty)$ a $a, b \in \mathbf{R}$, přičemž aspoň jedno z čísel a, b je nenulové, limita*

$$\lim_{t \to +\infty} a \cos \beta t + b \sin \beta t$$

neexistuje.

20. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu splňují $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které má v $+\infty$ limitu 0, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Postupujte podobně jako v úlohách 18 a 19. Je třeba použít tvar fundamentálního systému a to, že pro* $\beta_1, \dots, \beta_k \in (0, \infty)$ *různá platí*

$$\lim_{t \to +\infty} c + a_1 \cos \beta_1 t + b_1 \sin \beta_1 t + \cdots + a_k \cos \beta_k t + b_k \sin \beta_k t = 0$$

pouze v případě, že $c = a_1 = b_1 = \cdots = a_k = b_k = 0$.

21. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu jsou reálné a kladné splňují $|\lambda| > 1$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené na intervalu $(0, +\infty)$, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 18. Příslušná limita je opět* 0 *– omezená funkce dělená funkcí s limitou* $+\infty$.

10. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu, která jsou buď reálné nebo mají kladnou imaginární část, jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ a splňují
$$0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2 < \cdots < \operatorname{Re}\lambda_k.$$
Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené na $(0, +\infty)$, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 19.*

22. Předpokládejme, že všechny kořeny charakteristického polynomu splňují $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Ukažte, že jediné řešení rovnice, které je omezené na $(0, +\infty)$, je konstantní nulová funkce.

Návod: *Postupujte stejně jako v úloze 20.*

Úlohy o fundamentální matici a řešení homogenní rovnice

Uvažujme rovnici (∗∗). Nechť $\mathbb{U}$ je její fundamentální matice (jde o maticovou funkci $\mathbb{U}\colon \mathbf{R} \to M(n \times n)$).

23. Ukažte, že funkce y je řešením rovnice (∗∗), právě když existuje takové $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$, že
$$y(t) = \text{ prvek v prvním řádku součinu } \mathbb{U}(t) \cdot \boldsymbol{c}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

24. Ukažte, že funkce y je řešením rovnice (∗∗), právě když existuje takové $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$, že
$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \mathbb{U}(t) \cdot \boldsymbol{c}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

25. Ukažte, že funkce y je řešením rovnice (∗∗) splňující počáteční podmínky
$$y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1},$$
právě když
$$y(t) = \text{ prvek v prvním řádku součinu } \mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{U}(t_0)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Návod: *Použijte definici fundamentální matice a definici maticového násobení. V úloze 25 navíc použijte Větu XVII.1.*

26. Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární matice. Ukažte, že maticová funkce
$$\mathbb{U}'(t) = \mathbb{U}(t) \cdot \mathbb{A}$$
je také fundamentální matice.

Návod: *Nejprve si uvědomte, že $\mathbb{U}'(t)$ je regulární pro každé t. Dále, každý sloupec matice $\mathbb{U}'(t)$ je tvaru* $\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ *kde y je nějaké řešení rovnice. Nakonec ukažte, že tato n-tice řešení je lineárně nezávislá (jinak by existovalo nenulové $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n$, že $\mathbb{U}'(t) \cdot \boldsymbol{c}$ je nulový vektor pro každé t.*

Definujme funkci $\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tak, aby pro každé $t_0 \in \mathbf{R}$ a $\boldsymbol{z} \in \mathbf{R}^n$ byla funkce

$$y(t) = \Phi(t_0, \boldsymbol{z}, t), \quad t \in \mathbf{R},$$

řešením rovnice $(**)$ splňující počáteční podmínky

$$y(t_0) = z_1, y'(t_0) = z_2, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = z_n.$$

27. Napište vzorec pro funkci Φ.

28. Ukažte, že funkce Φ je třídy C^∞.

Návod: *V úloze 27 použijte úlohu 25. V úloze 28 použijte vzorec z úlohy 27, dále úlohu 1 a vyjádření inverzní matice pomocí Cramerova pravidla.*

Úlohy o fundamentální matici a řešení homogenní rovnice

Uvažujme rovnici $(*)$. Nechť $\mathbb{U}$ je fundamentální matice homogenní rovnice.

29. Ukažte, že funkce y je řešením rovnice $(*)$, právě když existuje vektorová funkce $\boldsymbol{c} : (a, b) \to \mathbf{R}^n$, pro kterou platí

$$\boldsymbol{c}'(t) = \mathbb{U}(t)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (a, b),$$

a

$$y(t) = \text{ prvek v prvním řádku součinu } \mathbb{U}(t) \cdot \boldsymbol{c}(t), \quad t \in (a, b).$$

30. Ukažte, že funkce y je řešením rovnice $(*)$ splňující počáteční podmínky $y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0$ (kde $t_0 \in (a, b)$), právě když

$$y(t) = \text{ prvek v prvním řádku součinu } \mathbb{U}(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \mathbb{U}(s)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds, \quad t \in (a, b).$$

31. Odvoďte vzorec pro řešení rovnice $(*)$ splňující počáteční podmínky $y(t_0) = z_0, y'(t_0) = z_1, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}$.

Návod: *V úloze 29 použijte metodu variace konstant, skutečnost, že primitivní funkce je určena jednoznačně až na konstantu a úlohu 23. V úloze 30 použijte úlohu 29. V úloze 31 zkombinujte úlohy 30 a 25.*

Definujme funkci $\Psi : (a,b)\times\mathbf{R}^n\times(a,b)\to\mathbf{R}$ tak, aby pro každé $t_0\in(a,b)$ a $\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^n$ byla funkce

$$y(t)=\Psi(t_0,\boldsymbol{z},t),\quad t\in(a,b),$$

řešením rovnice $(*)$ splňující počáteční podmínky

$$y(t_0)=z_1, y'(t_0)=z_2,\dots,y^{(n-1)}(t_0)=z_n.$$

32. Napište vzorec pro funkci Ψ.

33. Ukažte, že funkce Ψ je třídy C^1.

34. Nechť f je třídy C^k (kde $k\in\mathbf{N}$). Ukažte, že funkce Ψ je třídy C^{k+1}.

35. Nechť f je třídy C^∞. Ukažte, že funkce Ψ je třídy C^∞.

Návod: *V úloze 32 použijte úlohu 31. V úloze 33 použijte vzorec z úlohy 31, dále úlohu 28 a postup jejího řešení v kombinaci s metodami řešení cvičení 7–10 ke Kapitole XV. Úlohu 34 dokazujte matematickou indukcí z úlohy 33. Úloha 35 plyne z úlohy 34.*