Komentář k oddílu XVI.2: Tvar fundamentálního systému, rovnice se speciální pravou stranou

O významu tohoto oddílu:

- V oddílu XVI.1 jsme si vysvětlili a dokázali, jaký je tvar množiny řešení lineární rovnice s konstantními koeficienty.

  Použili jsme k tomu jednak abstraktní věty o lineárních zobrazeních – z Vět IX.5 a IX.6 jsme dokázali Větičku XVI.2.

  Podrobnější informaci o řešení homogenní rovnice nám dala Věta XVI.3, při jejímž důkazu jsme použili Větu XVI.1.

  Ale třebaže již leccos víme o struktuře množiny řešení, zatím nám věty z oddílu XVI.1 nedávají metodu řešení konkrétních rovnic.

  To je obsahem tohoto (a následujícího) oddílu.

- Z Větičky XVI.2 víme, že důležitou součástí hledání řešení je vyřešení homogenní rovnice. Víme, že množina řešení homogenní rovnice je vektorový podprostor (podle Větičky XVI.2(i)), jehož dimenze je rovna n (tj. řádu rovnice) – to plyne z Věty XVI.3.

  Tedy, abychom popsali množinu všech řešení homogenní rovnice, je vhodné najít bázi prostoru řešení (tj. fundamentální systém). Pak řešení homogenní rovnice budou právě lineární kombinace prvků fundamentálního systému.

  Jak najít fundamentální systém, nám říká Věta XVI.4.

- Druhou částí řešení je nalezení jednoho partikulárního řešení nehomogenní rovnice (viz Větička XVI.2(ii)).

  Jak takové jedno řešení nalézt, pokud je pravá strana ve speciálním tvaru, říká Věta XVI.5.

  Případem, kdy pravá strana je obecná spojitá funkce, se budeme zabývat v oddílu XVI.3.

K Větě XVI.4:

- Tato věta poskytuje popis (jednoho možného) fundamentálního systému homogenní rovnice. Lze ji chápat jako analogii Věty XII.4 o tvaru fundamentálního systému pro diferenční rovnice. Důkaz i význam je podobný.

- Podrobný důkaz této věty provádět nebudeme. Podobně jako u Věty XII.4 sestává ze tří částí:
  - Všechny funkce uvedené v tabulce jsou řešení homogenní rovnice. Toto naznačíme, proč platí.
  - Funkce uvedené v tabulce jsou lineárně nezávislé. To lze dokázat zjemněním postupu řešení Cvičení 7 z doplňujících cvičení k oddílu IX.1.
  - Funkcí v tabulce je právě n.

  Z těchto tří kroků pak plyne, že funkce uvedené v tabulce tvoří bázi prostoru řešení, s využitím Větičky IX.4.

- Důležitou roli zde hraje charakteristický polynom rovnice. Máme-li rovnici
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
pak charakteristický polynom je polynom tvaru
$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$
Má tedy stupeň n (což se rovná řádu rovnice).

- Nechť $L : C^n(\mathbf{R}) \to C(\mathbf{R})$ je lineární zobrazení definované v oddílu XVI.1, tj.
$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y, \quad y \in C^n(\mathbf{R}).$$
Vztah k charakteristickému polynomu ilustruje následující výpočet. Zvolme nějaké $\lambda \in \mathbf{R}$ a uvažme funkci $y(t) = e^{\lambda t}$, $t \in \mathbf{R}$. Pak platí
$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \ldots, y^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$$
pro $t \in \mathbf{R}$.

  Tedy, dosadíme-li funkci y do L, dostaneme
$$\begin{aligned} L(y)(t) &= \lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \\ &= (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}_{\chi(\lambda)}) e^{\lambda t} = \chi(\lambda) e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

  Je-li λ kořenem charakteristického polynomu (tj. $\chi(\lambda) = 0$), je funkce $y(t) = e^{\lambda t}$ řešením homogenní rovnice.

- Nyní se podívejme na funkci $y(t) = te^{\lambda t}$. Pak platí

  $$y'(t) = e^{\lambda t} + \lambda te^{\lambda t}, y''(t) = 2\lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 te^{\lambda t}, \ldots, y^{(n)}(t) = n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \lambda^n te^{\lambda t}$$

  pro $t \in \mathbf{R}$. Po dosazení do L dostaneme

  $$\begin{aligned} L(y)(t) &= n\lambda^{n-1}e^{\lambda t} + \lambda^n te^{\lambda t} + a_{n-1}(n-1)\lambda^{n-2}e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}te^{\lambda t} \\ &\qquad + \cdots + a_1 e^{\lambda t} + a_1\lambda te^{\lambda t} + a_0 te^{\lambda t} \\ &= (\underbrace{n\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1}_{\chi'(\lambda)})e^{\lambda t} \\ &\qquad + (\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0}_{\chi(\lambda)})te^{\lambda t} \\ &= \chi'(\lambda)e^{\lambda t} + \chi(\lambda)te^{\lambda t}. \end{aligned}$$

  Tedy, pokud λ je kořen charakteristického polynomu násobnosti 2, pak $\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = 0$, a proto funkce $y(t) = te^{\lambda t}$ je řešením homogenní rovnice.

- Analogicky (s použitím podobných složitějších výpočtů) lze dokázat:

  Je-li $\lambda \in \mathbf{R}$ kořen charakteristického polynomu násobnosti s, pak funkce

  $$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{s-1}e^{\lambda t}$$

  jsou řešením homogenní rovnice.

  Z toho plyne, že funkce v první části tabulky – odpovídající reálným kořenům charakteristického polynomu – jsou opravdu řešení homogenní rovnice.

- Nyní se podívejme na imaginární kořeny charakteristického polynomu. Pokud $\alpha + \beta i$ je kořenem, je také $\alpha - \beta i$ kořenem, a to se stejnou násobností (viz Věta VIII.19).

  Jeden způsob, jak vysvětlit, že funkce v druhé části tabulky jsou také řešením homogenní rovnice, je oklikou přes řešení v komplexním oboru (podobně jako u Věty XII.4).

  Pro komplexní funkce reálné proměnné definujeme derivace zcela stejně jako pro reálné funkce – pak vyjde, že derivaci počítáme tak, že zvlášť derivujeme reálnou část a zvlášť imaginární část.

Uvažme nyní funkci

$$y(t) = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Pak

$$\begin{aligned} y'(t) &= \alpha e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) + e^{\alpha t}(-\beta\sin\beta t + i\beta\cos\beta t) \\ &= (\alpha+\beta i)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) = (\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)t}. \end{aligned}$$

Proto, podobně jako v reálném případě lze spočítat, že

$L(e^{(\alpha+\beta i)t}) = \chi(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)t}$ a $L(te^{(\alpha+\beta i)t}) = \chi'(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)t}+\chi(\alpha+\beta i)te^{(\alpha+\beta i)t}$.

Dále lze podobně (pomocí komplikovanějších výpočtů) dokázat:

Je-li $\alpha+\beta i$ kořen charakteristického polynomu násobnosti u, pak funkce

$$e^{(\alpha+\beta i)t}, te^{(\alpha+\beta i)t}, \dots, t^{u-1}e^{(\alpha+\beta i)t}$$

jsou řešením homogenní rovnice v komplexním oboru. Protože $\alpha-\beta i$ je také kořen násobnosti u, jsou i funkce

$$e^{(\alpha-\beta i)t}, te^{(\alpha-\beta i)t}, \dots, t^{u-1}e^{(\alpha-\beta i)t}$$

řešením homogenní rovnice v komplexním oboru.

Protože

$t^k e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}\left(t^k e^{(\alpha+\beta i)t} + t^k e^{(\alpha-\beta i)t}\right)$ a $t^k e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2i}\left(t^k e^{(\alpha+\beta i)t} - t^k e^{(\alpha-\beta i)t}\right)$,

dostaneme, že (reálné) funkce

$$\begin{gathered} e^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, \dots, t^{u-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t, \dots, t^{u-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{gathered}$$

jsou také řešením homogenní rovnice.

- V předchozích bodech jsme naznačili, proč jsou všechny funkce v tabulce řešením homogenní rovnice.

  Tedy reálnému kořenu násobnosti s přísluší v tabulce s funkcí a dvojici komplexně sdružených kořenů násobnosti u v tabulce přísluší $2u$ funkcí.

  Protože všech kořenů, pokud je počítáme včetně násobnosti, je n (viz Věta VIII.18 a následující poznámka), máme v tabulce právě n funkcí.

  Pokud víme, že jsou lineárně nezávislé (což dokazovat nebudeme), víme, že tvoří bázi prostoru řešení (díky Větě XVI.3 a Větičce IX.4).

K Větě XVI.5:

- Tato věta poskytuje metodu nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice v případě, že pravá strana je ve speciálním tvaru (ve tvaru připomínajícím řešení homogenní rovnice).

  Tuto větu lze chápat jako analogii Věty XII.5 pro diferenční rovnice. Její způsob použití i důkaz je podobný.

  Důkaz ovšem provádět nebudeme, vysvětlíme si ovšem, co věta říká a jak ji používat.

- Předpokládejme, že číslo $\alpha + \beta i$ není kořenem charakteristického polynomu.

  Dále předpokládejme, že R, S jsou dva polynomy s reálnými koeficienty. Pak

  $$L\left(e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)\right) = e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t),$$

  kde P, Q jsou opět polynomy s reálnými koeficienty (jiné než R a S, ale ne vyššího stupně než je vyšší ze stupňů R a S).

  Tento postřeh říká, jak aplikovat Větu XVI.5: Pokud je pravá strana ve tvaru

  $$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t),$$

  pak najdeme jedno řešení ve tvaru

  $$e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t)$$

  Prakticky to provedeme takto: To, co je potřeba určit, je tvar polynomů R a S. Napíšeme tedy polynomy R a S v obecném tvaru – s neznámými koeficienty, stupeň obou je nevýše roven většímu ze stupňů polynomů P a Q. Tento obecný tvar dosadíme do rovnice (tj. do zobrazení L) a určíme koeficienty tak, aby vyšla pravá strana. (To bude vyžadovat řešení jisté soustavy lineárních rovnic.)

- V případě, že pravá strana je ve tvaru

  $$e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$$

  jako výše, přičemž číslo $\alpha+\beta i$ je kořenem charakteristického polynomu, a to s násobností m, postupujeme velmi podobně, jen řešení hledáme ve tvaru

  $$t^m e^{\alpha t}(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t).$$

- I v případě, že jeden z polynomů P, Q je nulový, mohou být oba polynomy R, S nenulové.
- V případě, že $\beta = 0$, je situace jednodušší:

  Pokud má v tomto případě pravá strana tvar

  $$e^{\alpha t} P(t),$$

  pak hledáme řešení ve tvaru

  $$e^{\alpha t} R(t),$$

  pokud α není kořenem charakteristického polynomu, resp.

  $$t^m e^{\alpha t} R(t),$$

  pokud α je kořenem charakteristického polynomu s násobností m.