Komentář k oddílu XVI.1: Lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficenty – struktura prostoru řešení

Obecné poznámky k tomuto typu rovnic

- Uvažujeme rovnice tvaru
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$
kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou zadaná reálná čísla a f je zadaná funkce, která je spojitá na daném intervalu (a, b).

  (Proměnnou tentokrát značíme t, ale to snad nezpůsobí žádné problémy.)

- Taková rovnice je n-tého řádu – vyskytuje se v ní n-tá derivace neznámé funkce y a vyšší derivace nikoli.

- Slovní spojení „s konstantními koeficienty“ znamená, že koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla, tedy konstanty a nikoli obecné funkce (i takové rovnice se zkoumají).

- Než si vysvětlíme, proč jsou tyto rovnice lineární, uvědomme si, že každé řešení této rovnice je třídy C^n.

  Nechť totiž y je řešením rovnice na nějakém otevřeném intervalu $I \subset (a, b)$.

  Pak z definice řešení plyne, že v každém bodě intervalu I existuje vlastní n-tá derivace funkce y. Z toho ovšem plyne, že funkce $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ jsou spojité na I (protože každá z těchto funkcí má vlastní derivaci v každém bodě I).

  Nakonec funkce y splňuje rovnici, a tedy pro každé $t \in I$ platí
$$y^{(n)}(t) = f(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \ldots - a_1 y'(t) - a_0 y(t).$$
  Protože funkce na pravé straně je spojitá na I, je i levá strana, tj. $y^{(n)}$, spojitá na I. Tedy y je opravdu třídy C^n na I.

- Nyní si řekněme, co znamená linearita těchto rovnic. Znamená, že levou stranu lze interpretovat jako hodnotu jistého lineárního zobrazení.

  Konkrétně, zobrazení $L : C^n((a, b)) \to C((a, b))$ definované předpisem
$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y, \quad y \in C^n((a, b)),$$
  je lineární. Plyne to z věty o aritmetice derivací.

K Větě XVI.1:

- Tato věta má dvě části. První část říká, že pro každou sadu počátečních podmínek existuje právě jedno maximální řešení, které podmínky splňuje. Druhá část říká, že maximální řešení jsou definována na celém intervalu (a, b).

  Tato věta připomíná závěrečné tvrzení z Kapitoly XV o lineárních rovnicích prvního řádu. Skutečně jde o analogii.

  Rozdíl je v tom, že v Kapitole XV to bylo závěrečné tvrzení, které jsme dokázali z metody řešení lineárních rovnic prvního řádu, zde jde o první tvrzení, které budeme používat při vysvětlování toho, jak vypadá množina řešení.

- První část věty říká, že zvolíme-li bod $t_0 \in (a, b)$ a předepíšeme hodnotu řešení a jeho derivací až do řádu $n - 1$ v bodě t_0, pak existuje právě jedno maximální řešení, které tyto podmínky splňuje.

  Toto tvrzení je zároveň analogií Větičky XII.1 a bude hrát podobnou roli. Nicméně, na rozdíl od Větičky XII.1, která je triviální, toto tvrzení triviální není.

  Je důsledkem obecné Věty XVII.3, což nyní rozebírat nebudeme. S tím souvisí i to, že počáteční podmínky obsahují n rovností, protože jde o rovnici n-tého řádu.

- Druhá část věty říká, že maximální řešení jsou definována na celém intervalu (a, b). To není samozřejmá věc, jak jsme viděli u rovnic se separovanými proměnnými i u autonomních rovnic.

  Toto tvrzení plyne z obecné Věty XVII.12, což nyní rozebírat nebudeme.

Větička XVI.2 a její důkaz:

Bod (i): Homogenní rovnice je rovnice s nulovou pravou stranou.

Protože nulová funkce je spojitá na $\mathbf{R}$, plyne z Věty XVI.1, že maximální řešení homogenní rovnice jsou definována na celém $\mathbf{R}$.

Množina řešení homogenní rovnice je jádro výše definovaného lineárního zobrazení $\mathbf{R}$. Přitom z Věty IX.5 víme, že jádro lineárního zobrazení je vektorový podprostor (prostoru $C^n(\mathbf{R})$, v našem případě je $(a, b) = \mathbf{R}$).

- Dodatek k bodu (i): Třebaže nulová funkce je spojitá na $\mathbf{R}$, můžeme uvažovat zúžení na menší interval (a, b). V tom případě budou maximální řešení homogenní rovnice definované na celém (a, b) a budou tvořit vektorový podprostor prostoru $C^n((a, b))$.

  Toto se hodí si rozmyslet v případě, kdy řešíme nehomogenní rovnici, kdy funkce f na pravé straně není definována na celém $\mathbf{R}$, ale na menším intervalu (a, b). V tom případě bude prvním krokem řešení homogenní rovnice.

Bod (ii): Toto tvrzení plyne z Věty IX.6 aplikované na výše uvedené lineární zobrazení L.

Věta XVI.3 a její důkaz:

- Tato věta je analogií Věty XII.2 a důkaz bude probíhat obdobně, s použitím Věty XVI.1 místo Větičky XII.1.
- Důkaz:

  Uvažujme homogenní rovnici, tj. pravá strana je nulová funkce definovaná na $\mathbf{R}$. S použitím analogických kroků jako ve Větě XII.2 najdeme bázi prostoru řešení, která má n prvků.

  Důkaz rozdělíme do tří kroků:

Krok 1: Volba prvků báze.

Podle Věty XVI.1 existují funkce $y_1, y_2, \ldots, y_n$, které jsou řešením homogenní rovnice a navíc splňují počáteční podmínky

$$
\begin{array}{ccccc}
y_1(0) = 1, & y_1'(0) = 0, & y_1''(0) = 0, & \ldots & y_1^{(n-1)}(0) = 0, \\
y_2(0) = 0, & y_2'(0) = 1, & y_2''(0) = 0, & \ldots & y_2^{(n-1)}(0) = 0, \\
y_3(0) = 0, & y_3'(0) = 0, & y_3''(0) = 1, & \ldots & y_3^{(n-1)}(0) = 0,, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
y_n(0) = 0, & y_n'(0) = 0, & y_n''(0) = 0, & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) = 1,
\end{array}
$$

Ukážeme, že těchto n funkcí tvoří bázi prostoru řešení.

Krok 2: Funkce $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé.

Uvažme lineární kombinaci těchto funkí, která je rovna nulovému vektoru (tj. konstantní nulové funkci).

Neboli, mějme čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ taková, že

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0.$$

Toto znamená, že

$$\forall t \in \mathbf{R}\colon\ \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t) = 0. \qquad (\circ)$$

Protože funkce $y_1, \dots, y_n$ – jakožto řešení – jsou třídy C^n, můžeme rovnost $(\circ)$ derivovat. Tak dostaneme

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\}\ \forall t \in \mathbf{R}\colon\ \alpha_1 y_1^{(j)}(t) + \alpha_2 y_2^{(j)}(t) + \cdots + \alpha_n y_n^{(j)}(t) = 0.$$

Speciálně, pokud do rovnosti $(\circ)$ a do poslední rovnosti dosadíme $t = 0$, dostaneme, s použitím počátečních podmínek,

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

Tedy ona lineární kombinace musí být triviální, což dokončuje důkaz lineární nezávislosti.

Krok 3: Každé řešení homogenní rovnice lze vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí $y_1, \dots, y_n$.

Nechť z je libovolné řešení homogenní rovnice.

Uvažme funkci

$$w = z(0) \cdot y_1 + z'(0) \cdot y_2 + \cdots + z^{(n-1)}(0) \cdot y_n,$$

tj. funkci, která je lineární kombinací funkcí $y_1, \dots, y_n$ s koeficienty $z(0), z'(0), \dots, z^{(n-1)}(0)$.

Protože funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou řešením homogenní rovnice a množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový podprostor (Větička XVI.2(i)), je i funkce w řešením homogenní rovnice (jakožto lineární kombinace řešení).

Navíc, když uvážíme počáteční podmínky, které splňují řešení $y_1, \dots, y_n$, vidíme, že

$$\begin{aligned}
w(0) &= z(0)\cdot y_1(0) + z'(0)\cdot y_2(0) + \cdots + z^{(n-1)}(0)\cdot y_n(0) = z(0),\\
w'(0) &= z(0)\cdot y_1'(0) + z'(0)\cdot y_2'(0) + \cdots + z^{(n-1)}(0)\cdot y_n'(0) = z'(0),\\
&\ \vdots\\
w^{(n-1)}(0) &= z(0)\cdot y_1^{(n-1)}(0) + z'(0)\cdot y_2^{(n-1)}(0) + \cdots + z^{(n-1)}(0)\cdot y_n^{(n-1)}(0) = z^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že funkce w a z jsou obě řešením homogenní rovnice a navíc splňují stejné počáteční podmínky.

Z Věty XVI.1 nyní plyne, že se tato řešení rovnají, neboli $w = z$, tedy

$$z = z(0)\cdot y_1 + z'(0)\cdot y_2 + \cdots + z^{(n-1)}(0)\cdot y_n,$$

Tedy řešení z lze vyjádřit jako lineární kombinaci funkcí $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

To dokončuje důkaz.

- Kdybychom uvažovali homogenní rovnici nikoli na celém $\mathbf{R}$, ale pouze na nějakém menším intervalu (a, b) (tj. pravá strana je konstantní nulová funkce definovaná na (a, b)), pak by maximální řešení tvořila podprostor dimenze n prostoru $C^n((a, b))$. Důkaz by byl zcela stejný, jen bychom počáteční podmínky uvažovali v jiném bodě – místo bodu 0 bychom zvolili nějaký bod $t_0 \in (a, b)$.

- Stejně jako v kapitole XII pro bázi prostoru řešení homogenní rovnice používáme termín „fundamentální systém řešení homogenní rovnice“.