Komentář k oddílu XVI.3: Metoda variace konstant

O významu tohoto oddílu:

- Cílem toho oddílu je hlavně zformulovat a dokázat Větu XVI.7. Tato věta dává univerzální metodu, jak najít partikulární řešení nehomogenní rovnice.
- Máme rovnici
  $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$
  kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).

  Pokud f je ve speciálním tvaru, lze partikulární řešení najít pomocí Věty XVI.5.

  Věta XVI.7 naproti tomu funguje pro každou spojitou funkci f.
- Pokud je funkce f ve speciálním tvaru z Věty XVI.5, pak lze samozřejmě Větu XVI.7 použít také. Ale použití Věty XVI.5 obvykle bývá výrazně jednodušší.

O fundamentální matici a Větičce XVI.6:

- Nechť $y_1, \dots, y_n$ je fundamentální systém řešení homogenní rovnice.

  Pak definujme fundamentální matici jako maticovou funkci
  $$\mathbb{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$
  Jde o čtvercovou matici řádu n, která v řádcích má postupně hodnoty, hodnoty první derivace až hodnoty $(n-1)$-té derivace prvků fundamentálního systému.

  Přitom v prvním sloupci jsou hodnoty derivací funkce y_1, ve druhém sloupci y_2 atd.
- Proč se tato maticová funkce nazývá fundamentální matice a proč je to velmi přirozená věc, si vysvětlíme v oddílu XVII.2.

  V tuto chvíli je to pro nás jen pomocný nástroj k důkazu Věty XVI.7.

- Větička XVI.6 a její důkaz:

  Větička říká, že fundamentální matice je regulární v každém bodě $t \in \mathbf{R}$. Přirozenost tohoto tvrzení bude ozřejmena v oddílu XVII.2.

  Nicméně důkaz můžeme relativně snadno provést už nyní.

  Postupujeme sporem. Předpokládejme, že existuje nějaké $t_0 \in \mathbf{R}$, pro které matice $\mathbb{U}(t_0)$ není regulární.

  To ovšem znamená, že existuje $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$, pro které platí $\mathbb{U}(t_0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. (Pokud $\mathbb{U}(t_0)$ není regulární, pak lineární zobrazení reprezentované touto maticí není prosté – viz Věta VI.19 a následující poznámky, a tedy jeho jádro obsahuje nenulový vektor – viz Důsledek Věty IX.6.)

  Platí

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}(t_0)\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \dots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \dots & y_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

  tedy rovnost $\mathbb{U}(t_0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$ znamená

$$
\begin{aligned}
c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) &= 0 \\
c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) + \dots + c_n y_n'(t_0) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= 0.
\end{aligned}
$$

  Pokud definujeme

$$z = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n,$$

  pak uvedené rovnosti říkají, že

$$z(t_0) = z'(t_0) = \dots = z^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

Tedy z je řešení homogenní rovnice (jakožto lineární kombinace řešení), které splňuje stejné počáteční podmínky jako konstantní nulové řešení. Z Věty XVI.1 plyne, že dvě řešení splňující stejné počáteční podmínky, se rovnají, a proto z je konstantní nulová funkce.

To ovšem znamená, že

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0.$$

Protože $y_1, \ldots, y_n$ jsou lineárně nezávislé, musí být $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, neboli $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$.

To je ale spor s volbou $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n \setminus \{\boldsymbol{o}\}$.

Tento spor dokončuje důkaz.

Věta XVI.7, její důkaz, použití, atp.

- Tato věta říká, jak můžeme partikulární řešení nehomogenní rovnice najít ve tvaru

  $$y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t),$$

  kde $c_1, \ldots, c_n$ jsou vhodné funkce.

  Název „variace konstant“ vychází z toho, že pokud by $c_1, \ldots, c_n$ byly konstanty, dostali bychom právě řešení homogenní rovnice. Ale když konstanty nahradíme vhodnými funkcemi, dostaneme řešení nehomogenní rovnice.

- Důkaz:

  Předpokládejme, že

  $$y(t) = c_1(t) y_1(t) + c_2(t) y_2(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t)$$

  a že funkce $c_1, \ldots, c_n$ splňují soustavu rovnic

  $$\begin{array}{ccccccccc} c_1' y_1 & + & c_2' y_2 & + & \ldots & + & c_n' y_n & = & 0 \\ c_1' y_1' & + & c_2' y_2' & + & \ldots & + & c_n' y_n' & = & 0 \\ & & & & & & \vdots & & \\ c_1' y_1^{(n-2)} & + & c_2' y_2^{(n-2)} & + & \ldots & + & c_n' y_n^{(n-2)} & = & 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} & + & c_2' y_2^{(n-1)} & + & \ldots & + & c_n' y_n^{(n-1)} & = & f. \end{array} \qquad (\clubsuit)$$

Ukážeme, že y je řešením rovnice. K tomu postupně spočteme

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1(t) + c_2'(t)y_2(t) + \cdots + c_n'(t)y_n(t)}_{=0} \\
&\qquad\qquad + c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) + \cdots + c_n(t)y_n'(t) \\
&= c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) + \cdots + c_n(t)y_n'(t), \\
y''(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1'(t) + c_2'(t)y_2'(t) + \cdots + c_n'(t)y_n'(t)}_{=0} \\
&\qquad\qquad + c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + \cdots + c_n(t)y_n''(t) \\
&= c_1(t)y_1''(t) + c_2(t)y_2''(t) + \cdots + c_n(t)y_n''(t), \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-2)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t)}_{=0} \\
&\qquad\qquad + c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t) \\
&= c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t), \\
y^{(n)}(t) &= \underbrace{c_1'(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)y_n^{(n-1)}(t)}_{=f(t)} \\
&\qquad\qquad + c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) \\
&= \boxed{f(t)} + c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t).
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\begin{aligned}
L(y)(t) &= y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\
&= f(t) + c_1(t)y_1^{(n)}(t) + c_2(t)y_2^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n)}(t) \\
&\qquad + a_{n-1}(c_1(t)y_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)y_n^{(n-1)}(t)) \\
&\qquad + \cdots + a_1(c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) + \cdots + c_n(t)y_n'(t)) \\
&\qquad + a_0(c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)) \\
&= f(t) + c_1(t)(\underbrace{y_1^{(n)}(t) + a_{n-1}y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_1'(t) + a_0 y_1(t)}_{=L(y_1)(t)=0}) \\
&\qquad + c_2(t)(\underbrace{y_2^{(n)}(t) + a_{n-1}y_2^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_2'(t) + a_0 y_2(t)}_{=L(y_2)(t)=0}) \\
&\qquad + \cdots + c_n(t)(\underbrace{y_n^{(n)}(t) + a_{n-1}y_n^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y_n'(t) + a_0 y_n(t)}_{=L(y_n)(t)=0}) \\
&= f(t).
\end{aligned}$$

Tedy $L(y) = f$, neboli y je řešením nehomogenní rovnice a důkaz je hotov.

- V předchozím bodě jsme větu dokázali, nyní vysvětleme její použití pro řešení nehomogenní rovnice.

  Chceme-li najít všechna řešení nehomogenní rovnice, postupujeme následovně:

  Krok 1: Najdeme fundamentální systém řešení homogenní rovnice (podle Věty XVI.4).

  Nechť to jsou funkce $y_1, \dots, y_n$.

  Krok 2: Vyřešíme soustavu rovnic ($\clubsuit$) s neznámými $c_1', \dots, c_n'$.

  Je to vlastně soustava lineárních rovnic pro funkce, neboli soustava lineárních rovnic s parametrem t.

  Pro pevné $t \in (a, b)$ jde o soustavu lineárních rovnic s maticí $\mathbb{U}(t)$. Podle Větičky XVI.6 je tato matice regulární, proto má soustava právě jedno řešení.

  Soustavu řešíme nejlépe metodou eliminace (pomocí řádkových úprav převedeme na schodovitou matici a pak řešíme odzadu).

Krok 3: Určíme funkce $c_1, \dots, c_n$ jakožto primitivní funkce k $c_1', \dots, c_n'$.

Krok 4: Funkce $y_p(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y(t)$, $t \in (a, b)$ je řešením nehomogenní rovnice (dle Věty XVI.7).

Krok 5: Všechna řešení nehomogenní rovnice jsou funkce tvaru

$$y(t) = y_p(t) + \alpha_1 y_1(y) + \alpha_2 y_2(t) + \cdots + \alpha_n y_n(t), \quad t \in (a, b), \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}.$$

To plyne z Větičky XVI.2(ii).

- Z uvedeného postupu je snad dostatečně zřejmé, že použití Věty XVI.5 je výrazně jednodušší:

  Je třeba napsat tvar řešení s obecnými polynomy, dosadit do rovnice, upravit a následně vyřešit jednu soustavu lineárních rovnic.

  Zatímco aplikace Věty XVI.7 vyžaduje spočítat fundamentální matici (derivace prvků fundamentálního systému až do řádu $n - 1$), vyřešit soustavu lineárních rovnic s parametrem a nakonec spočítat n primitivních funkcí.

  Proto, kdykoli je pravá strana ve tvaru, který připouští použití Věty XVI.5, je vhodné použít tuto větu a nikoli variaci konstant.

- Použití metody variace konstant jsme si vysvětlili a příslušnou větu dokázali. Nicméně se lze ptát, jak na tuto metodu přijít.

  Ta myšlenka hledat řešení ve tvaru $y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y(t)$ je prostě takový nápad, který někdo dostal.

  U lineárních rovnic prvního řádu v Kapitole XV se tvar $y(t) = c(t)y_h(t)$ dosadil do rovnice a vcelku snadno pak vyšlo, jak musí vypadat $c'(t)$.

  Kdybychom zcela stejně postupovali pro rovnice řádu n, dostaneme zcela nepřehlednou rovnici, v níž se budou vyskytovat derivace funkcí c_j až do řádu n. Proto je třeba postupovat chytřeji.

  V literatuře se vyskytuje následující zdůvodnění:

  Dosadíme do rovnice a přitom zajistíme, aby se tam nevyskytovaly vyšší derivace funkcí c_j. Tak se postupně dostane ona soustava rovnic.

  Postupně počítáme $y', y'', \dots$ jako v důkazu. Abychom se vyhnuli vyšším derivacím funkcí c_j, postupně přidáváme předpoklady nulovosti příslušných výrazů. A nakonec dostaneme poslední rovnici s pravou stranou $f(t)$.

Nicméně to, proč je tento postup opravdu přirozený, bude zřejmé až z Věty XVII.8, jejího důkazu a metody použití.