Komentář k oddílu XVII.4: Vlastnosti maximálních řešení – část druhá

K Lemmatu XVII.11:

- Toto jednoduché lemma se často používá pro zkoumání řešení (soustav) diferenciálních rovnic a jejich chování.

  Vysvětlíme si nejprve jeho předpoklady a tvrzení.

- Prvním předpokladem je, že máme tři čísla a, α, β, přičemž $a \geq 0$,$\beta \geq 0$ a $\alpha > 0$, a dále funkci u, která je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle t_0, t_1)$ (kde $t_0 \in \mathbf{R}$ a t_1 je buď nějaké reálné číslo větší než t_0 nebo $+\infty$).

  Dále předpokládáme, že funkce u splňuje

$$\forall t \in \langle t_0, t_1) : u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta)\, ds. \qquad (*)$$

  Tvrzení pak říká, že platí nerovnost

$$\forall t \in \langle t_0, t_1) : u(t) \leq (a + \tfrac{\beta}{\alpha})e^{\alpha(t-t_0)}. \qquad (**)$$

- Jaký to má význam:

  Ve vztahu $(*)$ se funkce u vyskytuje na levé i na pravé straně. Tedy funkce u je odhadnuta pomocí integrálu z u.

  Ve vztahu $(**)$ se vyskytuje u jen na levé straně. Tj. máme funkci u odhadnutou nějakou konkrétní funkcí, už ne pomocí u.

- Souvislost s diferenciálními rovnicemi uvidíme v dalších větách. Poznamenejme jen, že nerovnosti tvaru podobného $(*)$ se přirozeně odvozují z Větičky XVII.1, tedy z tam zmíněné integrální rovnice.

- Důkaz lemmatu:

  Zavedeme si pomocnou funkci

$$v(t) = a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta)\, ds, t \in \langle t_0, t_1).$$

  Protože funkce u je spojitá ma $\langle t_0, t_1)$, je funkce v dobře definovaná na intervalu $\langle t_0, t_1)$ (podle Věty VIII.5, integrál uvažujeme Riemannův).

Navíc podle Věty VIII.7 platí

$$v'(t) = \alpha u(t) + \beta, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Protože podle ($*$) je $u(t) \le v(t)$ pro $t \in \langle t_0, t_1)$, dostáváme

$$v'(t) = \alpha u(t) + \beta \le \alpha v(t) + \beta, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Tedy pro každé $t \in (t_0, t_1)$ platí

$$\begin{aligned} v'(t) - \alpha v(t) &\le \beta, \\ v'(t)e^{-\alpha t} - \alpha v(t)e^{-\alpha t} &\le \beta e^{-\alpha t}, \\ (v(t)e^{-\alpha t})' &\le \beta e^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} (v(s)e^{-\alpha s})'\,ds &\le \int_{t_0}^{t} \beta e^{-\alpha s}\,ds, \\ v(t)e^{-\alpha t} - v(t_0)e^{-\alpha t_0} &\le [-\tfrac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha s}]_{t_0}^{t} \\ v(t)e^{-\alpha t} - ae^{-\alpha t_0} &\le -\tfrac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t} + \tfrac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t_0}, \\ v(t)e^{-\alpha t} &\le ae^{-\alpha t_0} - \tfrac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t} + \tfrac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t_0} \\ v(t) &\le ae^{\alpha(t-t_0)} - \tfrac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}e^{\alpha(t-t_0)} \le (a + \tfrac{\beta}{\alpha})e^{\alpha(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Protože $u(t) \le v(t)$, dostáváme vztah ($**$).

- Lemma je formulováno pro interval $\langle t_0, t_1)$, kde $t_1 > t_0$.

  Jeho analogie ovšem platí i pro interval $(t_1, t_0\langle$, kde $t_1 < t_2$.

  V tom případě z předpokladu, že funkce u splňuje

$$\forall t \in (t_1, t_0\rangle : u(t) \le a + \int_{t}^{t_0} (\alpha u(s) + \beta)\,ds \qquad (\circ)$$

  plyne, že platí nerovnost

$$\forall t \in t \in (t_1, t_0\rangle : u(t) \le (a + \tfrac{\beta}{\alpha})e^{\alpha(t_0-t)}. \qquad (\circ\circ)$$

  Důkaz lze provést stejným způsobem, případně odvodit z původního tvrzení aplikovaného na funkci $\widetilde{u}(t) = u(-t)$ na intervalu $\langle -t_0, -t_1)$.

K Větě XVII.12:

- Tato věta říká, že za jistých předpokladů jsou maximální řešení definovaná na největších myslitelných intervalech.

  Že to není něco samozřejmého, víme z metod řešení různých typů rovnic.

  Například pro rovnice se separovanými proměnnými bylo určení intervalů důležitou součástí postupu řešení. Stejně tak při vyšetřování autonomních rovnic.

  Naproti tomu u lineárních rovnic je řešení automaticky definované na největším myslitelném intervalu. Pro lineární rovnice prvního řádu to vyšlo z metody řešení, pro rovnice vyšších řádů a pro soustavy je to důsledek právě této věty.

- Předpoklady a tvrzení věty:

  - Tato věta se týká soustav

    $$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

    kde vektorové zobrazení $\boldsymbol{f}$ je definované a spojité na otevřené množině G tvaru

    $$G = (a, b) \times \mathbf{R}^n,$$

    kde (a, b) je nějaký otevřený interval.

    To znamená, že $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ je definovaná pro $t \in (a, b)$ a libovolné $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$.

    Za této situace je interval (a, b) největším myslitelným intervalem, na němž může být definováno nějaké řešení.

  - Dalším předpokladem je odhad „růstu“ zobrazení $\boldsymbol{f}$ v $\boldsymbol{x}$, tj. v proměnných $x_1, \dots, x_n$.

    Přesněji – předpokládáme, že existují funkce α, β spojité na intervalu (a, b) takové, že

    $$\forall [t, \boldsymbol{x}] \in G \colon \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \le \alpha(t)\|\boldsymbol{x}\| + \beta(t).$$

    Říká se tomu, že růst je „nejvýše lineární“. Znamená to, že velikost $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ roste při rostoucí $\|\boldsymbol{x}\|$ (tj. vzdálenosti $\boldsymbol{x}$ od počátku) srovnatelně s $\|\boldsymbol{x}\|$.

Poznamenejme, že toto omezení se vztahuje na chování při rostoucí $\|\boldsymbol{x}\|$, nikoli na chování s tím, jak se t blíží ke krajním bodům intervalu (a, b).

  - I když to v předpokladech není uvedeno, obvykle se předpokládá, že funkce α, β jsou nezáporné.

    Kdyby nebyly nezáporné, nahradili bychom je funkcemi $|\alpha|, |\beta|$ a předpoklad bude splněn zřejmě také.
  - Za uvedených předpokladů věta říká, že každé maximální řešení je definováno na celém intervalu (a, b), tj. na největším myslitelném intervalu.

- Základní postup důkazu:

  Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení definované na intervalu $(c, d) \subset (a, b)$.

  Cílem je dokázat, že $(c, d) = (a, b)$, tj. $c = a$ a $d = b$.

  Důkaz se provede sporem. Předpokládejme, že $d < b$.

  Zvolme nějaké $t_0 \in (c, d)$.

  S použitím Větičky XVII.1, předpokladů věty a Lemmatu XVII.11 dokážeme, že vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ je omezená na intervalu $\langle t_0, d)$, tj. existuje $M > 0$, že

  $$\forall t \in \langle t_0, d) : \|\boldsymbol{x}(t)\| \leq M.$$

  Pak ovšem

  $$K = \langle t_0, d\rangle \times \overline{B(\boldsymbol{o}, M)} = \{(t, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \colon t \in \langle t_0, d\rangle, \|\boldsymbol{y}\| \leq M\}$$

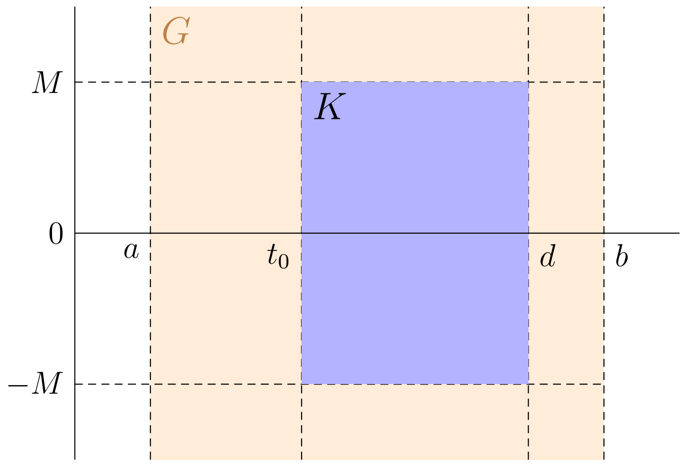
  je kompaktní podmnožina G a přitom platí

  $$\forall t \in \langle t_0, d) \colon [t, \boldsymbol{x}(t)] \in K.$$

  To je ovšem spor s Větou XVII.12. Proto musí být $d = b$.

  Rovnost $c = a$ se dokáže analogicky.

Pro $n = 1$ situaci ilustruje obrázek:



Množina G je pás $(a, b) \times \mathbf{R}$, množina K je modrý obdélník obsažený v tomto pásu. Pro vyšší dimenze je obráze obdobný – K je v tomto případě „válec“, jehož podstavou je n-rozměrná koule o poloměru M.

- Důkaz pro $n = 1$:

Stejně jako ve Větě XVII.10 provedeme důkaz pro $n = 1$ a pak vysvětlíme, v čem se liší obecný případ.

Krok 1: Máme rovnici $x' = f(t, x)$, f je spojitá funkce na $(a, b) \times \mathbf{R}$, α, β jsou nezáporné spojité funkce na (a, b) a platí nerovnost z předpokladů věty.

Předpokládejme, že $x : (c, d) \to \mathbf{R}$ je maximální řešení rovnice $x' = f(t, x)$ a přitom platí $d < b$.

Zvolme $t_0 \in (c, d)$.

Krok 2: Podle Větičky XVII.1 platí

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in \langle t_0, d).$$

Krok 3: Funkce α a β jsou spojité na intervalu (a, b), tedy i na intervalu $\langle t_0, d\rangle$. Proto na tomto intervalu nabývají svého maxima. Označme

$$\alpha_m = 1 + \max_{t \in \langle t_0, d\rangle} \alpha(t), \quad \beta_m = \max_{t \in \langle t_0, d\rangle} \beta(t).$$

Krok 4: Z Kroku 2 a z předpokladů věty plyne, že pro každé $t \in \langle t_0, d)$ platí

$$|x(t)| = \left| x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds \right| \overset{\text{VIII.3(v)}}{\leq} |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\, ds$$
$$\leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} (\alpha(s)|x(s)| + \beta(s))\, ds$$
$$\overset{\text{Krok 3}}{\leq} |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} (\alpha_m |x(s)| + \beta_m)\, ds$$

Krok 5 Z Kroku 4 plyne, že jsou splněny předpoklady Lemmatu XVII.11 pro funkci $u(t) = |x(t)|$ na intervalu $\langle t_0, d)$ (pro $|x(t_0)|, \alpha_m, \beta_m$ místo a, α, β – uvědomme si, že $\alpha_m > 0$).

Podle Lemmatu XVII.11 tedy pro každé $t \in \langle t_0, d)$ platí

$$|x(t)| \leq \left(|x(t_0)| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m} \right) e^{\alpha_m (t - t_0)} \leq \left(|x(t_0)| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m} \right) e^{\alpha_m (d - t_0)}.$$

Položme $M = \left(|x(t_0)| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m} \right) e^{\alpha_m (d - t_0)}$. Pak M je kladné reálné číslo a platí

$$\forall t \in \langle t_0, d)\colon |x(t)| \leq M.$$

Krok 6: Položme

$$K = \{[t, y] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \colon t \in \langle t_0, d\rangle, |y| \leq M\} = \langle t_0, d\rangle \times \langle -M, M\rangle.$$

Pak K je uzavřená a omezená množina, je tedy kompaktní. Navíc $K \subset G$ a z Kroku 5 plyne, že

$$\forall t \in \langle t_0, d)\colon [t, x(t)] \in K.$$

To je ovšem spor s Větou XVII.10.

Tím je důkaz proveden.

- Důkaz pro obecné n je velmi podobný:

  Místo x a f píšeme $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{f}$ a místo $|x(t)|$ počítáme s $\|\boldsymbol{x}(t)\|$.

  Pak kroky 1 až 3 jsou zcela stejné.

V Kroku 4 je výpočet trochu složitější:

Máme

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| = \left\|\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds\right\| \overset{\text{IX.9(iv)}}{\leq} \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \left\|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds\right\|.$$

Druhý sčítanec odhadujeme podobně jako v důkazu Věty XVII.10:

$$\begin{aligned}\left\|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds\right\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left|\int_{t_0}^{t} f_i(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds\right|^2} \overset{\text{VIII.3(v)}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} |f_i(s, \boldsymbol{x}(s))|\, ds\right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} (\alpha(s)\|\boldsymbol{x}(s)\| + \beta(s))\, ds\right)^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \int_{t_0}^{t} (\alpha(s)\|\boldsymbol{x}(s)\| + \beta(s))\, ds \overset{\text{Krok 1}}{\leq} \sqrt{n} \cdot \int_{t_0}^{t} (\alpha_m\|\boldsymbol{x}(s)\| + \beta_m)\, ds.\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall t \in \langle t_0, d) \colon \|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \sqrt{n} \cdot \int_{t_0}^{t} (\alpha_m\|\boldsymbol{x}(s)\| + \beta_m)\, ds.$$

V Kroku 5 si všimneme, že jsou splněny předpoklady Lemmatu XVII.11 pro funkci $u(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|$ na intervalu $\langle t_0, d)$ (s čísly $\|\boldsymbol{x}(t_0)\|, \sqrt{n} \cdot \alpha_m, \sqrt{n} \cdot \beta_m$ místo a, α, β), a tedy

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leq \left(\|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right) e^{\sqrt{n}\cdot\alpha_m(t-t_0)} \leq \left(\|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right) e^{\sqrt{n}\cdot\alpha_m(d-t_0)}.$$

Položíme $M = \left(\|\boldsymbol{x}(t_0)\| + \tfrac{\beta_m}{\alpha_m}\right) e^{\sqrt{n}\cdot\alpha_m(d-t_0)}$ a dojdeme k témuž závěru.

Krok 6 je opět zcela analogický, položíme-li

$$K = \{[t, \boldsymbol{y}] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \colon t \in \langle t_0, d\rangle, \|\boldsymbol{y}\| \leq M\} = \langle t_0, d\rangle \times \overline{B(\boldsymbol{o}, M)}.$$

Závěr je stejný.

K Větě XVII.13:

- Této větě se říká „věta o spojité závislosti na počátečních podmínkách".

  Říká totiž, že za daných předpokladů malá změna počátečních podmínek vyvolá malou změnu řešení.

  Používá k tomu formulaci typu „$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \ldots$", podobnou formulaci použité v definici spojitosti.

- Základní předpoklady jsou tyto:

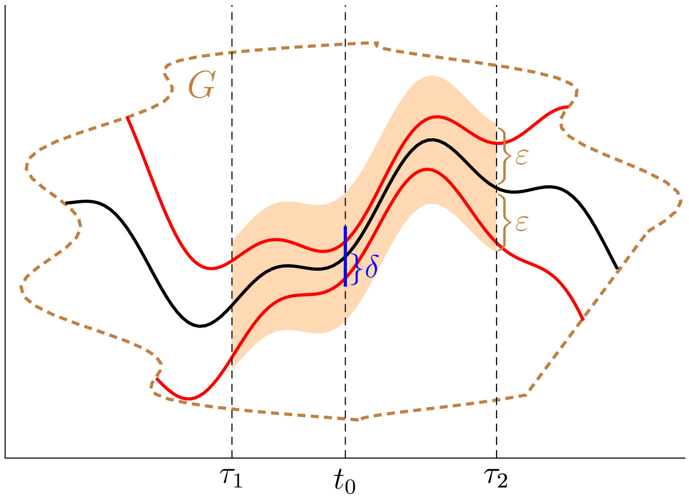
  - Uvažujeme soustavu $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$.
  - Vektorové zobrazení $\boldsymbol{f}$ je definováno na nějaké otevřené množině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ a splňuje tam předpoklady Věty XVII.3.

    Tedy, speciálně z Věty XVII.3 plyne, že pro každý bod $[t_0, \boldsymbol{x}_0] \in G$ existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy, které splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.
  - Dále máme dáno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy, (α, β) je interval, na kterém je definováno.

    Nakonec máme dáno $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a body $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$.

    To lze interpretovat tak, že máme dán uzavřený interval $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle \subset (\alpha, \beta)$, který obsahuje t_0 jako svůj vnitřní bod.

- Co říká tvrzení věty, vysvětlíme mj. s pomocí následujícího obrázku.



  Černě je vyznačen graf maximálního řešení $\boldsymbol{x}$. Dále je vyznačen uzavřený interval $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ obsažený v defičním oboru $\boldsymbol{x}$ a jeho vnitřní bod t_0.

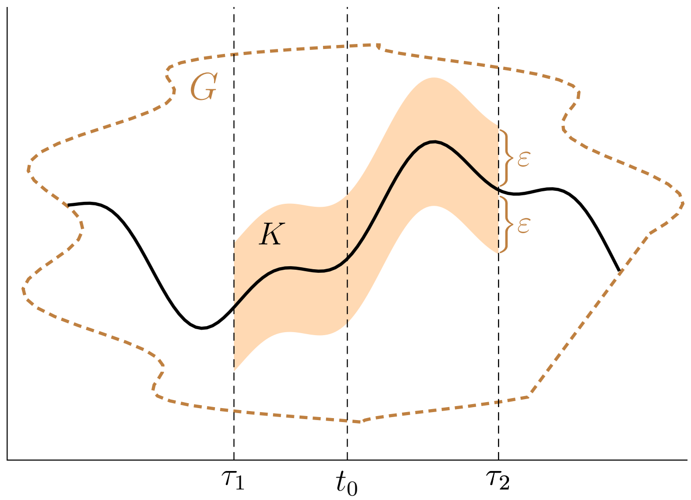
  Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že cosi platí.

  A to cosi je toto: Pokud $\boldsymbol{y}$ je maximální řešení soustavy splňující $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, tj. jeho graf protíná modře vyznačenou úsečku, pak platí:

  - $\boldsymbol{y}$ je definováno alespoň na intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ (tj. definičním oborem $\boldsymbol{y}$ je otevřený interval obsahující interval $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$);
  - $\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle \colon \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon$, tj. graf $\boldsymbol{y}$ na intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ je obsažen v pásu o šířce ε kolem grafu $\boldsymbol{x}$ (na obrázku jde o oranžově vyznačenou plochu).

  Červeně jsou vyznačeny grafy dvou maximálních řešení, na něž lze tvrzení věty aplikovat.

- Základní postup důkazu:



Je dáno $\boldsymbol{x}, t_0, \tau_1, \tau_2$ a $\varepsilon > 0$.

Pak

$$K = \{[t, \boldsymbol{z}] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \colon t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}(t)\| \leq \varepsilon\}$$

je omezená a uzavřená množina, je tedy kompaktní.

Pokud $\varepsilon > 0$ je dost malé, je $K \subset G$.

Tedy, je-li $\boldsymbol{y}$ maximální řešení takové, že $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \varepsilon$, pak $[t_0, \boldsymbol{y}(t_0)] \in K$, a tedy podle Věty XVII.10 existují $t_1 < t_0$ a $t_2 > t_0$, že body $[t_1, \boldsymbol{y}(t_1)]$ a $[t_2, \boldsymbol{y}(t_2)]$ neleží v K.

Aplikujeme Lemmatu XVII.11 na funkci $\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|$ a spočteme, že pro dost malé $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\|$ se nemůže stát, že $t_2 \leq \tau_2$ a $\|\boldsymbol{y}(t_2) - \boldsymbol{x}(t_2)\| > \varepsilon$.

Proto $t_2 > \tau_2$ a pro $t \in \langle t_0, \tau_2 \rangle$ je $\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| \leq \varepsilon$.

Podobný postup se provede pro t_1 a τ_1.

Tak vyjde tvrzení věty.

Dá se to stručně formulovat následovně:

Graf řešení $\boldsymbol{y}$ musí opustit kompakt K. To lze udělat dvěma způsoby – ve směru svislém (vzdálením se od grafu $\boldsymbol{x}$) nebo ve směru vodorovném (opuštěním intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Přitom, pokud $\boldsymbol{y}(t_0)$ je dost blízko $\boldsymbol{x}(t_0)$, první možnost nenastane.

- Důkaz pro $n = 1$:

  I tuto větu dokážeme nejprve pro $n = 1$ a pak vysvětlíme, co je třeba udělat v obecném případě.

  Krok 1: Máme dánu rovnici $x' = f(t, x)$, f je funkce dvou proměnných definovaná na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^2$, která splňuje předpoklady Věty XVII.3 – tedy je spojitá na G a $\frac{\partial f}{\partial x}$ je také spojitá na G.

  Dále máme dáno maximální řešení x, které je definováno na intervalu (α, β), čísla τ_1, t_0, τ_2 splňující $\alpha < \tau_1 < t_0 < \tau_2 < \beta$ a $\varepsilon > 0$.

  Krok 2: Položme

  $$A = \{[t, x(t)] \colon t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle\} = \{[t, z] \in \mathbf{R}^2 \colon t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, z = x(t)\}.$$

  Z předpokladů plyne, že $A \subset G$. Navíc je A zřejmě uzavřená (díky spojitosti funkce x lze snadno ukázat, že posloupnost v A nemůže konvergovat mimo A).

  A je dále omezená, protože funkce x je omezená na intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.

  Závěr: A je neprázdná kompaktní podmnožina G.

  Krok 3: Pokud $G \subsetneq \mathbf{R}^2$, uvažme funkci

  $$h(t, z) = \operatorname{dist}([t, z], \mathbf{R}^2 \setminus G) = \inf\{\rho([t, z], [t', z']) \colon [t', z'] \in \mathbf{R}^2 \setminus G\}$$

  pro $[t, z] \in \mathbf{R}^2$. Pak h je dobře definovaná funkce na $\mathbf{R}^2$, protože uvedené infimum existuje (příslušná množina je neprázdná, protože $\mathbf{R}^2 \setminus G \neq \emptyset$, a zdola omezená, protože 0 je dolní závora).

  Navíc pro každé $[t, z] \in G$ he $h(t, z) > 0$: Nechť $[t, z] \in G$. Protože G je otevřená, existuje $r > 0$, že $B([t, z], r) \subset G$, a tedy r je dolní závorou množiny z definice, proto $h(t, z) \geq r$.

  Navíc h je spojitá funkce, protože pro každé dva body $[t_1, z_1], [t_2, z_2] \in \mathbf{R}^2$ platí

  $$\|h(t_1, z_1) - h(t_2, z_2)\| \leq \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]). \qquad (*)$$

  Mějme tedy $[t_1, z_1], [t_2, z_2] \in \mathbf{R}^2$. Zvolme libovolné $\theta > 0$. Pak existuje $[t, z] \in \mathbf{R}^2 \setminus G$ splňující

  $$\rho([t_2, z_2], [t, z]) < h(t_2, z_2) + \theta.$$

  Pak platí

  $$\rho([t_1, z_1], [t, z]) \leq \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]) + \rho([t_2, z_2], [t, z]) < \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]) + h(t_2, z_2) + \theta,$$

tedy

$$h(t_1, z_1) \leq \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]) + h(t_2, z_2) + \theta,$$

neboli

$$h(t_1, z_1) - h(t_2, z_2) \leq \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]) + \theta.$$

Protože $\theta > 0$ je libovolné, máme

$$h(t_1, z_1) - h(t_2, z_2) \leq \rho([t_1, z_1], [t_2, z_2]). \tag{$\circ$}$$

Pokud prohodíme roli $[t_1, z_1]$ a $[t_2, z_2]$, dostaneme

$$h(t_2, z_2) - h(t_1, z_1) \leq \rho([t_2, z_2], [t_1, z_1]). \tag{$\circ\circ$}$$

Kombinací nerovností ($\circ$) a ($\circ\circ$) dostaneme nerovnost ($*$), a tedy spojitost funkce h.

Protože funkce h je spojitá a kladná na kompaktní množině A, nabývá na ní minima a toto minimum je kladné.

V tomto případě položme

$$\eta = \min\{\varepsilon, \tfrac{1}{2} \min h(A)\}.$$

Pokud $G = \mathbf{R}^2$, nic nepočítáme a rovnou položíme $\eta = \varepsilon$.

Krok 4: Označme

$$K = \{[t, z] \in \mathbf{R}^2 \colon t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, |z - x(t)| \leq \eta\}.$$

Pak K je uzavřená a omezená množina, je tedy kompaktní.

Navíc je $K \subset G$. (V případě, že $G = \mathbf{R}^2$, je to zřejmé, v případě, že $G \subsetneqq \mathbf{R}^2$ to plyne z volby η v Kroku 3.)

Krok 5: Z předpokladů zmíněných v Kroku 1 víme, že funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá na množině G, tedy i na K.

Protože K je kompaktní, je $\frac{\partial f}{\partial x}$ omezená na K, tedy existuje $M > 0$, že

$$\forall [t, z] \in K \colon \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, z) \right| \leq M.$$

Krok 6: $\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle\ \forall z_1, z_2 \in \mathbf{R}$:

$$[t, z_1], [t, z_2] \in K \Rightarrow |f(t, z_2) - f(t, z_1)| \leq M \cdot |z_2 - z_1|.$$

Důkaz: Mějme $t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Uvažme funkci

$$\varphi(z) = f(t, z), \quad z \in \langle x(t) - \eta, x(t) + \eta \rangle.$$

Pak φ je spojitá na intervalu $\langle x(t) - \eta, x(t) + \eta \rangle$ a v každém vnitřním bodě má vlastní derivaci (rovnou $\frac{\partial f}{\partial x}(t, z)$).

Nechť nyní $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$ jsou taková, že $[t, z_1], [t, z_2] \in K$. Pak $z_1, z_2 \in \langle x(t) - \eta, x(t) + \eta \rangle$. Pokud $z_1 = z_2$, pak dokazovaná nerovnost je triviální (platí dokonce rovnost).

Nechť tedy $z_1 \neq z_2$. Protože role z_1 a z_2 jsou symetrické, můžeme předpokládat, že $z_1 < z_2$. Pak funkce φ splňuje na intervalu $\langle z_1, z_2 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty (Věta IV.33), a tedy existuje $\xi \in (z_1, z_2)$, že $\varphi(z_2) - \varphi(z_1) = \varphi'(\xi)(z_2 - z_1)$. Pak

$$\begin{aligned} |f(t, z_2) - f(t, z_1)| &= |\varphi(z_2) - \varphi(z_1)| = |\varphi'(\xi)(z_2 - z_1)| \\ &= \left| \tfrac{\partial f}{\partial x}(t, \xi)(z_2 - z_1) \right| \leq M|z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

Krok 7: Nechť y je nějaké řešení rovnice definované na intervalu (c, d) obsahujícím bod t_0.

Předpokládejme, že

$$\forall t \in (c, d) \colon [t, y(t)] \in K.$$

Z toho speciálně plyne, že $c \geq \tau_1 > \alpha$ a $d \leq \tau_2 < \beta$.

Krok 8: Z Větičky XVII.1 plyne, že

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad t \in (\alpha, \beta), \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in (c, d). \end{aligned}$$

Krok 9: Pro každé $t \in \langle t_0, d)$ platí:

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= \left| y(t_0) - x(t_0) + \int_{t_0}^{t} (f(s, y(s)) - f(s, x(s)))\, ds \right| \\ &\overset{\text{VIII.3(v)}}{\leq} |y(t_0) - x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, x(s))|\, ds \\ &\overset{\text{Krok 6}}{\leq} |y(t_0) - x(t_0)| + \int_{t_0}^{t} M|y(s) - x(s)|\, ds. \end{aligned}$$

Krok 10: Z Kroku 9 plyne, že funkce $u(t) = |y(t) - x(t)|$ splňuje na intervalu $\langle t_0, d)$ předpoklady Lemmatu XVII.11 ($a = |y(t_0) - x(t_0)|$, $\alpha = M$, $\beta = 0$). Z tohoto lemmatu tedy plyne, že

$$\begin{aligned}\forall t \in \langle t_0, d)\colon |y(t) - x(t)| &\le |y(t_0) - x(t_0)|e^{M(t-t_0)} \le |y(t_0) - x(t_0)|e^{M(d-t_0)} \\ &\le |y(t_0) - x(t_0)|e^{M(\tau_2-t_0)}.\end{aligned}$$

Krok 11: Pokud Kroky 9 a 10 použijeme na interval $(c, t_0\rangle$, dostaneme

$$\forall t \in (c, t_0\rangle\colon |y(t) - x(t)| \le |y(t_0) - x(t_0)|e^{M(t_0-\tau_1)}$$

Krok 12: Zvolme $\delta \in (0, \eta)$ takové, aby

$$\delta e^{M(\tau_2-t_0)} < \tfrac{\eta}{2} \text{ a zároveň } \delta e^{M(t_0-\tau_1)} < \tfrac{\eta}{2}.$$

Dokážeme, že pro toto δ platí závěr věty:
Nechť tedy y je maximální řešení rovnice splňující $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta$. Označme interval, na kterém je definováno (α', β').
Položme

$$d = \inf\{t \in (t_0, \beta')\colon [t, y(t)] \notin K\}.$$

- Množina na pravé straně je neprázdná (podle Věty XVII.10) a zdola omezená (t_0 je dolní závora), proto d je dobře definováno a $d \in \langle t_0, \beta')$.
- Zřejmě platí $d \le \tau_2$. (Protože pro $t \in (t_0, d)$ je $[t, y(t)] \in K$.)
- Dále platí $d > t_0$: Funkce $y(t) - x(t)$ je spojitá a $|y(t_0) - x(t_0)| < \delta$. Proto existuje $\theta > 0$ splňující $t_0 + \theta < \tau_2$, že pro každé $t \in (t_0 - \theta, t_0 + \theta)$ je $|y(t) - x(t)| < \delta$.
  Pak ovšem pro $t \in (t_0 - \theta, t_0 + \theta)$ je $[t, y(t)] \in K$, tedy $d \ge t_0 + \theta$.
- Je tedy $d \in (t_0, \tau_2\rangle$ a zároveň $d < \beta'$.

Z Kroku 9 plyne, že

$$\forall t \in \langle t_0, d) : |y(t) - x(t)| \le |y(t_0) - x(t_0)|e^{M(\tau_2-t_0)} < \delta e^{M(\tau_2-t_0)} < \tfrac{\eta}{2},$$

tedy (podle věty o limitě a nerovnostech, viz Věta IV.5(ii)) i

$$|y(d) - x(d)| \le \tfrac{\eta}{2} < \eta$$

Z toho ovšem plyne (protože funkce $y - x$ je spojitá), že existuje $\theta > 0$, že $(d - \theta, d + \theta) \subset (\alpha', \beta')$ a pro $t \in (d - \theta, d + \theta)$ platí $|y(t) - x(t)| < \eta$.

Z toho dostáváme $d = \tau_2$:

- Kdyby totiž $d < \tau_2$, pak by pro každé $t \in (d, \min\{d+\theta, \tau_2\})$ platilo $[t, y(t)] \in K$.
- Zároveň by z definice d jakožto infima plynulo, že musí existovat $t \in (d, \min\{d+\theta, \tau_2\})$, pro které $[t, x(t)] \notin K$.

To je ovšem spor.

Je tedy opravdu $d = \tau_2$. Proto $\beta' > \tau_2$ a pro každé $t \in \langle t_0, \tau_2 \rangle$ platí (jak je spočteno výše)

$$|y(t) - x(t)| \leq \tfrac{\eta}{2} < \eta \leq \varepsilon.$$

Analogicky se dokáže, že $\alpha' < \tau_1$ a pro $t \in \langle \tau_1, t_0 \rangle$ platí

$$|y(t) - x(t)| \leq \tfrac{\eta}{2} < \eta \leq \varepsilon.$$

A to je přesně to, co jsme měli dokázat.

- Důkaz pro obecné n je velmi podobný:

  Místo f, x, y píšeme $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, máme $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n+1}$.

  V Kroku 1 splnění předpokladů Věty XVII.3 znamená, že $\boldsymbol{f}$ je spojité na G a funkce

  $$\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

  jsou spojité na G.

  Kroky 2,3,4 jsou zcela stejné.

  V Kroku 5 dostaneme, že existuje $M > 0$, že

  $$\forall [t, \boldsymbol{z}] \in K \; \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}\colon \; \left| \tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \boldsymbol{z}) \right| \leq M.$$

V Kroku 6 dokážeme nerovnosti

$\forall i \in \{1, \dots, n\}\ \forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle\ \forall \boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2 \in \mathbf{R}^n :$

$$[t, \boldsymbol{z}^1], [t, \boldsymbol{z}^2] \in K \Rightarrow |f_i(t, \boldsymbol{z}^2) - f_i(t, \boldsymbol{z}^1)| \leq \sqrt{n} \cdot M \cdot \|\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z}^1\|.$$

Postupujeme takto:

Zvolme libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ a $t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$.

Definujme funkci

$$\varphi_i(\boldsymbol{z}) = f_i(t, \boldsymbol{z}), \quad t \in B(\boldsymbol{x}(t), 2\eta).$$

Díky volbě η v Kroku 3 je φ_i dobře definovaná, díky předpokladům zmíněným v Kroku 1 je φ_i třídy C^1 na $B(\boldsymbol{x}(t), 2\eta)$.

Nechť nyní $\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2 \in \mathbf{R}^n$ jsou takové, že $[t, \boldsymbol{z}^1], [t, \boldsymbol{z}^2] \in K$.

Pak $\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2 \in \overline{B(\boldsymbol{x}(t), \eta)} \subset B(\boldsymbol{x}(t), 2\eta)$, a tedy podle Věty V.20 existuje $s \in (0, 1)$, že

$$\varphi_i(\boldsymbol{z}^2) - \varphi_i(\boldsymbol{z}^1) = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(s\boldsymbol{z}^2 + (1-s)\boldsymbol{z}^1)(z_j^2 - z_j^1).$$

Označme

$$\boldsymbol{z}^0 = s\boldsymbol{z}^2 + (1-s)\boldsymbol{z}^1.$$

Pak $\boldsymbol{z}^0 \in \overline{B(\boldsymbol{x}(t), \eta)}$ (protože toto je konvexní množina), a tedy $[t, \boldsymbol{z}^0] \in K$.

Máme tedy

$$\begin{aligned}
|f_i(t, \boldsymbol{z}^2) - f_i(t, \boldsymbol{z}^1)| = |\varphi_i(\boldsymbol{z}^2) - \varphi^i(\boldsymbol{z}^1)| &= \left| \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(s\boldsymbol{z}^2 + (1-s)\boldsymbol{z}^1)(z_j^2 - z_j^1) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{z}^0)(z_j^2 - z_j^1) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \boldsymbol{z}^0)(z_j^2 - z_j^1) \right| \\
&\overset{\text{I.1}}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, \boldsymbol{z}^0) \right)^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} (z_j^2 - z_j^1)^2}}_{= \|\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z}^1\|} \\
&\overset{\text{Krok 5}}{\leq} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} M^2} \cdot \|\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z}^1\| = \sqrt{n} \cdot M \cdot \|\boldsymbol{z}^2 - \boldsymbol{z}^1\|.
\end{aligned}$$

Kroky 7 a 8 jsou opět stejné.

V Kroku 9 počítáme:

Pro každé $t \in \langle t_0, d)$ platí:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| &= \left\| \boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)))\, ds \right\| \\ &\overset{\text{V.1(iv)}}{\leq} \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)))\, ds \right\|\end{aligned}$$

Druhý sčítanec odhadujeme:

$$\begin{aligned}\left\| \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{y}(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s)))\, ds \right\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} (f_i(s, \boldsymbol{y}(s)) - f_i(s, \boldsymbol{x}(s)))\, ds \right)^2} \\ &\overset{\text{VIII.3(v)}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} |f_i(s, \boldsymbol{y}(s)) - f_i(s, \boldsymbol{x}(s))|\, ds \right)^2} \\ &\overset{\text{Krok 6}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{n} \cdot M \cdot \|\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s))\|\, ds \right)^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \int_{t_0}^{t} \sqrt{n} \cdot M \cdot \|\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s))\|\, ds \\ &= \int_{t_0}^{t} n \cdot M \cdot \|\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s))\|\, ds.\end{aligned}$$

Tedy

$$\forall t \in \langle t_0, d)\colon \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| \leq \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} n \cdot M \cdot \|\boldsymbol{y}(s) - \boldsymbol{x}(s))\|\, ds.$$

V Kroku 10 si všimneme, že z Kroku 9 plyne, že funkce $u(t) = \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\|$ splňuje na intervalu $\langle t_0, d)$ předpoklady Lemmatu XVII.11 ($a = \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\|$, $\alpha = n \cdot M$, $\beta = 0$). Z tohoto lemmatu tedy plyne, že

$$\begin{aligned}\forall t \in \langle t_0, d)\colon \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| &\leq \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| e^{nM(t-t_0)} \leq \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| e^{nM(d-t_0)} \\ &\leq \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| e^{nM(\tau_2 - t_0)}.\end{aligned}$$

V Kroku 11 si všimneme, že použitím Kroků 9 a 10 na interval $(c, t_0\rangle$ dostaneme

$$\forall t \in (c, t_0\rangle \colon \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{x}(t)\| \leq \|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| e^{nM(t_0 - \tau_1)}.$$

V Kroku 12 zvolíme $\delta \in (0, \eta)$ takové, aby

$$\delta e^{nM(\tau_2 - t_0)} < \tfrac{\eta}{2} \text{ a zároveň } \delta e^{nM(t_0 - \tau_1)} < \tfrac{\eta}{2}$$

a dále postupujeme již zcela stejně až do konce důkazu.