Komentář k oddílu XVII.4: Vlastnosti maximálních řešení – část první
K obsahu a smyslu tohoto oddílu:

- Připomeňme, že maximální řešení jsou taková řešení, která už není možné prodloužit (na větší interval), aby zůstala řešeními.

  Najít všechna maximální řešení dané soustavy je maximální cíl při řešení. Velmi často však explicitní tvar řešení najít neumíme.

- Často však je možné zkoumat různé vlastnosti maximálních řešení i bez znalosti explicitního vzorce.

  K takovým vlastnostem patří samozřejmě existence a jednoznačnost (viz oddíl XVII.1), ale také definiční obor (omezený interval, celé $\mathbf{R}$, interval shora omezený a zdola ne atd.), limitní chování (limity v krajních bodech definičního oboru - vlastní, nevlastní, neexistují), omezenost a neomezenost řešení, periodičnost atp.

- Pro tento účel existují celé rozsáhlé teorie. V tomto oddílu si z nich ukážeme malý výsek – několik základních vlastností.

K Větě XVII.10:

- Předpoklady – první část:

  Tato věta se týká soustavy

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

  kde $\boldsymbol{x}$ je neznámá vektorová funkce a $\boldsymbol{f}$ je spojité vektorové zobrazení na definované na otevřené množině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

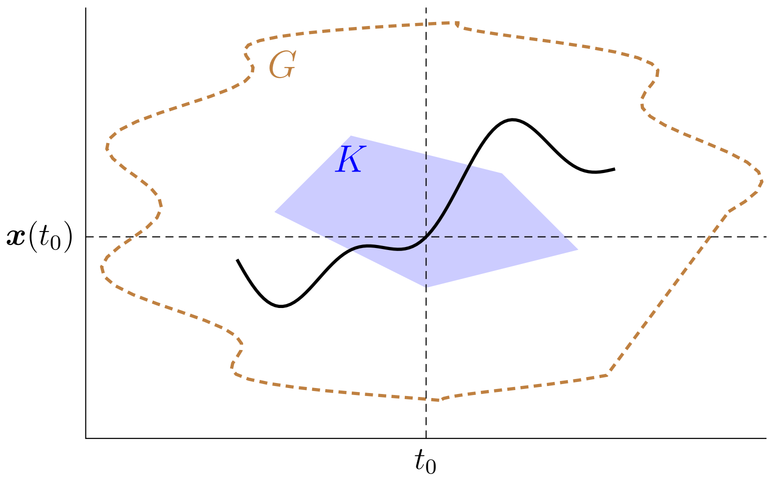
  To jsou přesně předpoklady Peanovy věty (Věta XVII.2). Proto víme, že pro každý bod $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ existuje nějaké maximální řešení soustavy, jehož graf tímto bodem prochází (tj. které splňuje počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$).

- Předpoklady – druhá část:

  Dále máme dáno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ této soustavy, které je definováno na intervalu (α, β).

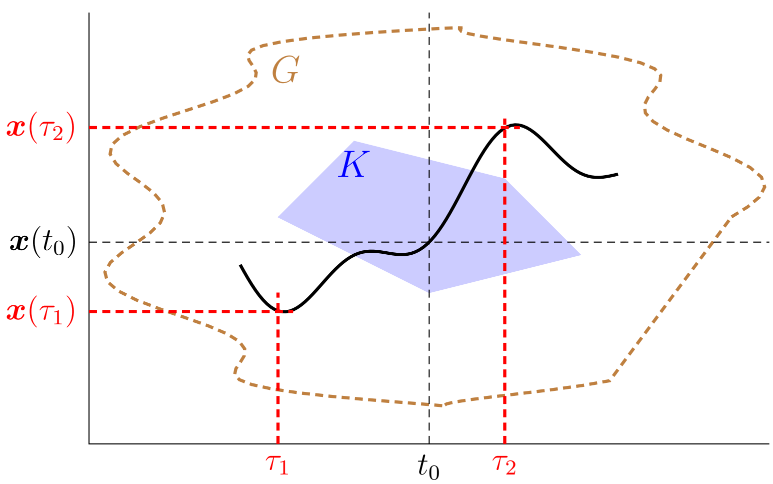
Potom máme kompaktní množinu $K \subset G$ a bod $t_0 \in (\alpha, \beta)$, pro který platí $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$.

Situaci ilustruje následující obrázek. Hnědá křivka ohraničuje množinu G (je čárkovaně, aby bylo zdůrazněno, že hraniční body do G nepatří, protože G je otevřená. Modře je vyznačena kompaktní množina K a černá křivka je graf řešení.



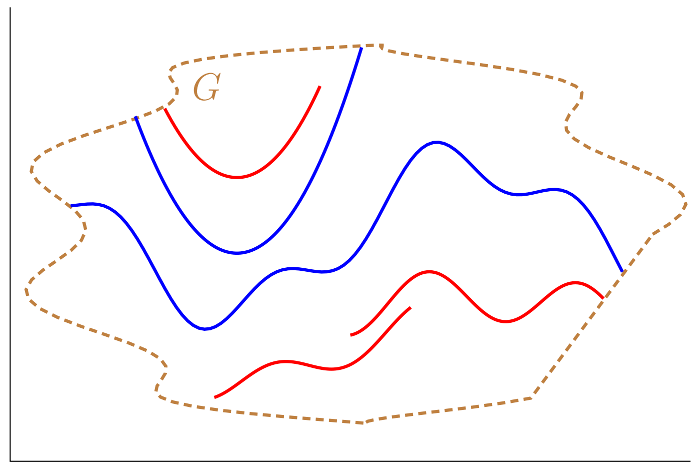
- Věta pak říká, že za těchto předpokladů nemůže být celý graf maximálního řešení byl obsažen v kompaktní množině K. Přesněji – existuje $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, že $[\tau_1, \boldsymbol{x}(\tau_1)] \notin K$ a také existuje $\tau_2 \in (t_0, \beta)$, že $[\tau_2, \boldsymbol{x}(\tau_2)] \notin K$.

  Ilustruje to opět obrázek:



- Význam této věty: Kompaktní podmnožina K otevřené množiny G je v jistém smyslu malá vzhledem k celé G. Graf maximálního řešení nemůže být celý v takové malé množině, ale musí sahat „od kraje ke kraji“ množiny G.

  Na následujícím obrázku jsou vyznačeny grafy pěti funkcí. Všechny grafy jsou obsaženy v množině G, ale pouze modré grafy sahají od kraje ke kraji. Červené grafy tedy nemohou být grafy maximálních řešení.

- Příklad na aplikaci této věty:

  Nechť funkce $x : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ je maximálním řešením diferenciální rovnice

  $$x' = x^2 + t^2.$$

  Pak platí:

  - $\beta = +\infty$ nebo $\lim\limits_{t \to \beta-} x(t) = +\infty$, a zároveň
  - $\alpha = -\infty$ nebo $\lim\limits_{t \to \beta-} x(t) = -\infty$.

  Dokážeme první tvrzení:

  Máme $f(t, x) = x^2 + t^2$. Tato funkce je definovaná a spojitá na $\mathbf{R}^2$, máme tedy $G = \mathbf{R}^2$

  Protože $f(t, x) = x^2 + t^2 \geq 0$, je řešení x neklesající.

Podle věty o limitě monotónní funkce tedy existuje limita

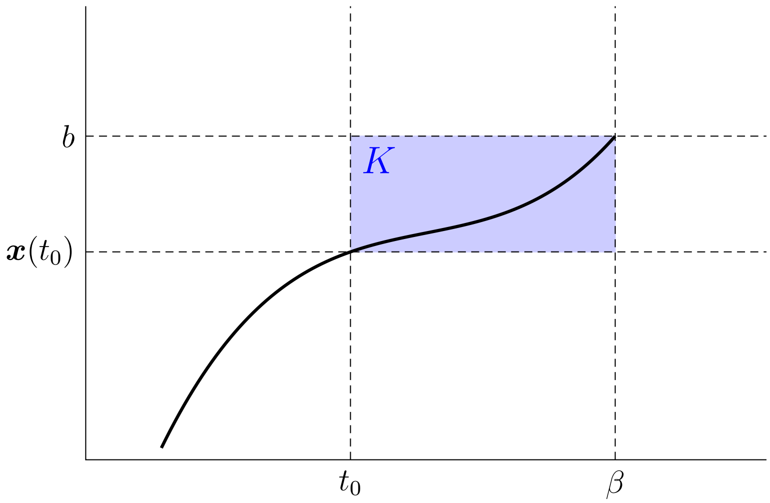
$$b = \lim_{t \to \beta -} x(t) \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}.$$

Tvrzení, které dokazujeme, říká, že buď $\beta = +\infty$ nebo $b = +\infty$.

Dokažme to například sporem: Předpokládejme, že $\beta \in \mathbf{R}$ a zároveň $b \in \mathbf{R}$. Zvolme $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a označme

$$K = \langle t_0, \beta \rangle \times \langle x(t_0), b \rangle,$$

viz obrázek:



To je omezená uzavřená množina (uzavřený obdélník), tedy je to kompaktní množina. Protože $G = \mathbf{R}^2$, je to kompaktní podmnožina G. Navíc platí

$$\forall t \in \langle t_0, \beta): [t, x(t)] \in K,$$

což je spor s Větou XVII.10.

Druhé tvrzení se dokáže zcela analogicky.

- Důkaz Věty XVII.10 – základní myšlenky a postup:

  Připomeňme, že máme maximální řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu (α, β), kompaktní množinu $K \subset G$ a bod $t_0 \in (\alpha, \beta)$, pro který $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$.

  Dokázat chceme, že existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že body $[\tau_1, \boldsymbol{x}(\tau_1)]$ a $[\tau_2, \boldsymbol{x}(\tau_2)]$ nepatří do K.

  Dokážeme existenci τ_2.

  Kdyby τ_2 neexistovalo, znamenalo by to, že pro každé $t \in \langle t_0, \beta)$ platí $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in K$.

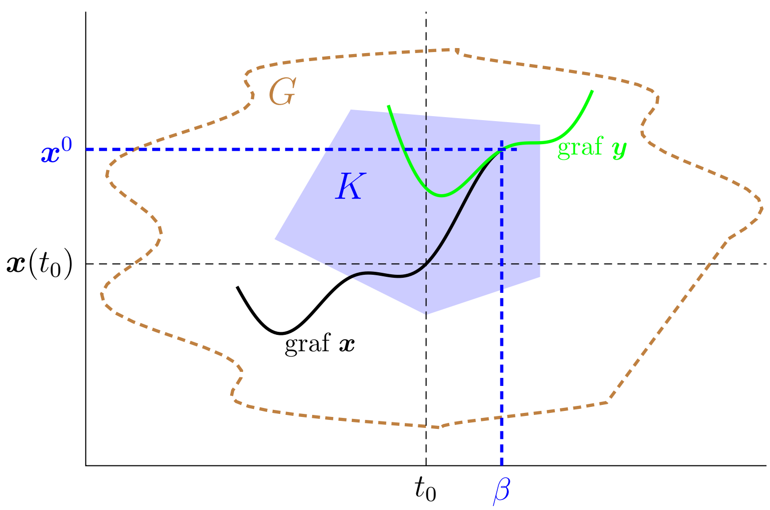
  Ukážeme, že existuje limita $\lim\limits_{t \to \beta-} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0$. Protože K je uzavřená, plyne z toho, že $[\beta, \boldsymbol{x}^0] \in K \subset G$.

  Podle Peanovy věty (Věta XVII.2) existuje maximální řešení $\boldsymbol{y}$ naší soustavy splňující podmínku $\boldsymbol{y}(\beta) = \boldsymbol{x}^0$.

  Pak řešení $\boldsymbol{x}$ můžeme prodloužit pomocí $\boldsymbol{y}$ za bod β.

  To je ovšem spor s maximalitou řešení $\boldsymbol{x}$.

  Ilustruje to následující obrázek.



- Důkaz věty:

  Důkaz provedeme podle naznačeného postupu, a to v několika krocích.

  Pro snazší představu důkaz provedeme nejprve pro případ $n = 1$ (tj. pro jednu rovnici, v tom případě píšeme x a f místo $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{f}$).

  Následně ukážeme, že důkaz obecného případu je velmi podobný, a zmíníme, v čem je rozdíl.

  Začátek důkazu: Máme otevřenou množinu $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, kompaktní množinu $K \subset G$, spojité zobrazení $\boldsymbol{f} : G \to \mathbf{R}^n$, vektorovou funkci $\boldsymbol{x} : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$, která je maximálním řešením soustavy

  $$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$$

  a bod $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

  Předpokládáme, že pro každé $t \in \langle t_0, \beta)$ platí $[t, \boldsymbol{x}(t)] \in K$, a ukážeme, že tento předpoklad vede ke sporu.

  Případ $n = 1$: Nejprve dokážeme tento speciální případ. Máme $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $f : G \to \mathbf{R}$ spojitá a $x : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ je maximální řešení rovnice $x' = f(t, x)$. Předpokládáme, že $[t, x(t)] \in K$ pro každé $t \in \langle t_0, \beta)$.

  Krok 1: Funkce f je omezená na množině K, tedy existuje $M > 0$, že pro každé $[u, v] \in K$ je $|f(u, v)| \leq M$.

  To plyne z toho, že K je neprázdná kompaktní množina a funkce f je spojitá na K, tedy nabývá na K svého minima i maxima (podle Věty V.10).

Krok 2: $\forall t_1, t_2 \in \langle t_0, \beta) \colon |x(t_2) - x(t_1)| \le M|t_2 - t_1|$.

Podle Věty XVII.1 platí

$$\forall t \in \langle t_0, \beta) \colon x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds,$$

tedy

$$\forall t_1, t_2 \in \langle t_0, \beta) \colon x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds$$

Vezměme $t_1, t_2 \in \langle t_0, \beta)$ a dokažme slíbenou nerovnost. Pokud $t_1 = t_2$, pak zřejmě platí rovnost. Protože nerovnost evidentně nezávisí na pořadí t_1 a t_2, můžeme předpokládat, že $t_1 < t_2$. Pak

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s))\, ds \right| \overset{\text{VIII.3(v)}}{\le} \int_{t_1}^{t_2} |f(s, x(s))|\, ds$$
$$\overset{\text{Krok 1}}{\le} \int_{t_1}^{t_2} M\, ds = M(t_2 - t_1).$$

V nerovnosti na druhém řádku používáme, že pro $s \in \langle t_1, t_2 \rangle \subset \langle t_0, \beta)$ platí $[s, x(s)] \in K$.

Krok 3: Existuje posloupnost $\{s_k\}$ v intervalu $\langle t_0, \beta)$ taková, že $s_k \to \beta$ a posloupnost $\{x(s_k)\}$ má vlastní limitu v $\mathbf{R}$.

Z toho, že $[t, x(t)] \in K$ pro každé $t \in \langle t_0, \beta)$ a K je omezená, plyne $\beta \in \mathbf{R}$.

Položme $t_k = t_0 + \frac{1}{k}(\beta - t_0)$ pro $k \in \mathbf{N}$. Pak $\{t_k\}$ je posloupnost v intervalu $\langle t_0, \beta)$, která splňuje $t_k \to \beta$.

Dále, posloupnost $\{x(t_k)\}$ je omezená. (Důvodem je to, že $[t_k, x(t_k)] \in K$ pro každé $k \in \mathbf{N}$ a K je omezená.)

Podle Bolzano-Weierstrassovy věty (Věta II.11) tedy existuje vybraná posloupnost $\{t_{k_l}\}$, že posloupnost $\{x(t_{k_l})\}$ je konvergentní.

Nyní stačí vzít $s_l = t_{k_l}$. Pak $\{s_l\}$ je posloupnost v intervalu $\langle t_0, \beta)$, $s_l \to \beta$ (podle věty o limitě vybrané posloupnosti, viz Věta II.3) a posloupnost $\{x(s_l)\}$ je konvergentní.

Krok 4: Existuje vlastní limita $\lim_{t\to\beta-} x(t)$.

Nechť $\{s_k\}$ je posloupnost z Kroku 3. Označme $x_0 = \lim_{k\to\infty} x(s_k)$. Ukážeme, že

$$\lim_{t\to\beta-} x(t) = x_0.$$

Podle Heineho věty (Věta IV.10 a její obrácení zmíněné v poznámce (2) za ní) stačí ukázat následující tvrzení:

$$\forall \{t_k\} \text{ posloupnost v } \langle t_0, \beta) \colon t_k \to \beta \Rightarrow x(t_k) \to x_0$$

Vezměme tedy takovou posloupnost $\{t_k\}$. Pak

$$|x(t_k) - x(s_k)| \overset{\text{Krok 2}}{\leq} M|t_k - s_k| \to M|\beta - \beta| = 0,$$

a tedy

$$x(t_k) = \underbrace{x(s_k)}_{\to x_0} + \underbrace{x(t_k) - x(s_k)}_{\to 0} \to x_0 + 0 = x_0.$$

Krok 5: Existuje maximální řešení y, pro které platí $y(\beta) = x_0$.

Nechť $\{s_k\}$ je posloupnost z Kroku 3. Pak $s_k \to \beta$ a $x(s_k) \to x_0$. Tedy $[s_k, x(s_k)] \to [\beta, x_0]$ (viz Věta V.3).

Protože $[s_k, x(s_k)] \in K$ pro každé k a K je uzavřená množina, je $[\beta, x_0] \in K$ (viz Věta V.4).

Protože $K \subset G$, je $[\beta, x_0] \in G$. Protože f je spojitá na G, plyne existence y z Peanovy věty (Věta XVII.2).

Krok 6: Nechť řešení y z Kroku 5 je definováno na intervalu (γ, δ). Pak $\delta > \beta$ a funkce

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & t \in (\alpha, \beta), \\ y(t) & t \in \langle \beta, \delta) \end{cases}$$

je řešením rovnice na intervalu (α, δ).

Funkce z je definovaná na intervalu (α, δ). Chceme ukázat, že je řešením rovnice, tj., že má v každém bodě intervalu (α, δ) vlastní derivaci a pro každé $t \in (\alpha, \delta)$ platí

$$z'(t) = f(t, z(t)).$$

Na intervalu (α, β) funkce z splývá s funkcí x, která je řešením, a tedy pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ rovnost platí.

Na intervalu (β, γ) funkce z splývá s funkcí y, která je řešením, a tedy pro každé $t \in (\beta, \delta)$ rovnost platí.

Zbývá dokázat, že rovnost je splněna i v bodě β. Protože $z(\beta) = y(\beta) = x_0$, chceme dokázat, že

$$z'(\beta) = f(\beta, x_0).$$

Spočteme zvlášť derivaci zprava a derivaci zleva.

Protože z splývá s y na intervalu $\langle \beta, \delta)$, platí

$$z'_+(\beta) = y'_+(\beta) = y'(\beta) = f(\beta, y(\beta)) = f(\beta, x_0),$$

kde jsme použili, že y je řešením na intervalu (γ, δ).

Nyní se podívejme na derivaci zleva. Protože

$$\lim_{t \to \beta-} z(t) = \lim_{t \to \beta-} x(t) = x_0 = z(\beta),$$

je funkce z spojitá zleva v bodě β. Proto derivaci zleva můžeme počítat podle Věty IV.35 jako limitu derivace

$$z'_-(\beta) = \lim_{t \to \beta-} z'(t) = \lim_{t \to \beta-} x'(t) = \lim_{t \to \beta-} f(t, x(t)) = f(\beta, x_0),$$

protože f je spojitá v bodě $[\beta, x_0]$.

Tím jsme dokázali, že z splňuje rovnici i v bodě β.

Závěr: Řešení z z Kroku 6 je prodloužením řešení x, což je spor s předpokladem, že x je maximální řešení.

- Důkaz pro obecné n se provede téměř stejně. Vysvětlíme, co je v jednotlivých krocích udělat jinak.

Krok 1: Funkce $f_1, \dots, f_n$ jsou spojité na G, tedy omezené na K. Existuje tedy $M > 0$, že

$$\forall [u, \boldsymbol{v}] \in K \, \forall i \in \{1, \dots, n\} \colon |f_i(u, \boldsymbol{v})| \le M.$$

Krok 2: $\forall t_1, t_2 \in \langle t_0, \beta)\colon \|\boldsymbol{x}(t_2) - \boldsymbol{x}(t_1)\| \leq \sqrt{n} \cdot M|t_2 - t_1|$.

Postupujeme stejně, vezměme $t_1, t_2 \in \langle t_0, \beta)$, $t_1 < t_2$. Pak

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}(t_2) - \boldsymbol{x}(t_1)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{t_1}^{t_2} f_i(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds \right|^2} \\ &\overset{\text{VIII.3(v)}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_1}^{t_2} |f_i(s, \boldsymbol{x}(s))|\, ds \right)^2} \overset{\text{Krok 1}}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\int_{t_1}^{t_2} M\, ds \right)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(M(t_2 - t_1)\right)^2} = \sqrt{n} \cdot M(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Krok 3: Existuje posloupnost $\{s_k\}$ v intervalu $\langle t_0, \beta)$ taková, že $s_k \to \beta$ a posloupnost $\{\boldsymbol{x}(s_k)\}$ má vlastní limitu v $\mathbf{R}^n$.

Postupujeme stejně jako v případě $n = 1$, jen místo Bolzano-Weierstrassovy věty použijeme její zobecnění v $\mathbf{R}^n$, tj. Lemma V.8.

Krok 4: Existuje vlastní limita $\lim\limits_{t \to \beta-} \boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$.

Postupujeme stejně jako v případě $n = 1$, použijeme analogii Heineho věty pro funkce více proměnných a odhad

$$|\boldsymbol{x}(t_k) - \boldsymbol{x}(s_k)| \overset{\text{Krok 2}}{\leq} \sqrt{n} \cdot M|t_k - s_k| \to \sqrt{n} \cdot M|\beta - \beta| = 0.$$

Krok 5: Existuje maximální řešení $\boldsymbol{y}$, pro které platí $\boldsymbol{y}(\beta) = \boldsymbol{x}_0$.

Postupujeme zcela stejně jako v případě $n = 1$.

Krok 6: Nechť řešení $\boldsymbol{y}$ z Kroku 5 je definováno na intervalu (γ, δ). Pak $\delta > \beta$ a funkce

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t) & t \in (\alpha, \beta), \\ \boldsymbol{y}(t) & t \in \langle \beta, \delta) \end{cases}$$

je řešením rovnice na intervalu (α, δ).

Postupujeme zcela stejně jako pro $n = 1$ s tím, že Větu IV.35 použijeme na jednotlivé složky $z_1, \dots, z_n$.

Závěr: Ke sporu dojdeme zcela stejným způsobem.