K oddílu VII.1 – číselné řady

Základní definice – motivace a vysvětlení

- Cílem této kapitoly je pochopit, co znamená sečíst nekonečně mnoho čísel, a naučit se poznávat, kdy to je možné a kdy ne.

- Začněme s ilustrací pomocí něčeho, co známe. Předpokládejme, že máme třeba 1000 čísel a chceme je sečíst. Pak budeme postupovat nejspíš následovně:

  1. Nejprve si ta čísla nějak seřadíme. Tak dostaneme konečnou posloupnost čísel
  $$a_1, a_2, \dots, a_{1000}.$$
  2. Pak vezmeme číslo a_1, přičteme k němu číslo a_2, k výsledku přičteme a_3, k výsledku a_4 a tak dále. Po 1000 krocích získáme výsledek.

     Toto lze interpretovat tak, že postupně počítáme částečné součty:
  $$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \ (= s_2 + a_3), \\ s_4 &= a_1 + a + 2 + a_3 + a_4 \ (= s_3 + a_4), \\ &\vdots \\ s_{1000} &= a_1 + \cdots + a_{1000} \ (= s_{999} + a_{1000}). \end{aligned}$$
  3. Výsledkem je s_{1000}.

  Poznámka: Víme, že sčítání čísel je komutativní a asociativní. Proto, když v prvním kroku oněch 1000 čísel seřadíme jiným způsobem, výsledek to neovlivní.

- V případě, že máme sečíst nekonečně mnoho čísel, postupujeme podobně. Mějme tedy zadáno nekonečně mnoho čísel.

  Protože nevíme, jak obecně udělat první krok, budeme předpokládat, že ta čísla máme již seřazená. To znamená, že máme danou posloupnost čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a chceme tato čísla sečíst (v tomto pořadí).

  Jak budeme postupovat:

1. Vezmeme číslo a_1, přičteme k němu číslo a_2, k výsledku přičteme a_3, k výsledku a_4 a tak dále ...

   Tento proces ovšem nikdy neskončí, nemáme poslední krok. Místo toho máme nekonečnou posloupnost

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1, \\ s_2 &= a_1 + a_2, \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \ (= s_2 + a_3), \\ s_4 &= a_1 + a + 2 + a_3 + a_4 \ (= s_3 + a_4), \\ &\vdots \\ s_m &= a_1 + \cdots + a_m \ (= s_{m-1} + a_m) \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. Máme tedy posloupnost $\{s_m\}_{m=1}^{\infty}$, které říkáme posloupnost částečných součtů.

   Protože tato posloupnost je nekonečná, nemá poslední člen, je přirozené za součet celé posloupnosti $\{a_n\}$ prohlásit limitu posloupnosti $\{s_m\}$ (pokud ovšem existuje).

Oproti případu, kdy sčítáme 1000 čísel (což lze udělat vždy, a výsledkem je opět číslo), v tomto případě je situace složitější.

Může se stát, že $\lim s_m$ existuje a je vlastní. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje (a jejím součtem je $\lim s_m$).

Může se stát, že $\lim s_m$ existuje a je nevlastní (tj. $\lim s_m = +\infty$ nebo $\lim s_m = -\infty$). Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a má součet $+\infty$ nebo $-\infty$.

Může se také stát, že $\lim s_m$ neexistuje. Pak říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje a nemá součet (nebo též osciluje).

Několik příkladů

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$:

   Posloupnost $\{a_n\}$ je konstantní posloupnost tvořená samými jedničkami. Tedy částečné součty jsou

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m\text{-krát}} = m$$

a platí

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} m = +\infty.$$

2. Součet geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, kde $x \in \mathbb{R}$.

   Případ $x = 1$ řeší předchozí příklad. Předpokládejme tedy, že $x \neq 1$. V tom případě můžeme spočítat částečné součty známým trikem následovně:

$$s_m = x + x^2 + \dots + x^m,$$
$$xs_m = x^2 + x^3 + \dots + x^{m+1},$$

   tedy

$$s_m(x-1) = x^{m+1} - x, \text{ neboli } s_m = \frac{x^{m+1}-x}{x-1},$$

   kterýžto vzoreček je též dobře známý. Dále rozlišíme několik případů:

   $x \in (-1,1)$**:** V tomto případě $x^{m+1} \to 0$ (jak víme z Kapitoly II), a tedy podle věty o aritmetice limit je

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \frac{x}{1-x}.$$

   V tomto případě tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ konverguje a její součet je $\frac{x}{x-1}$.

   $x > 1$**:** V tomto případě $x^{m+1} \to +\infty$ (jak víme z Kapitoly II), a tedy podle věty o aritmetice limit (poznamenávám, že $x - 1 > 0$) je

$$\lim_{m\to\infty} s_m = +\infty.$$

   V tomto případě tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverguje a její součet je $+\infty$.

   $x < -1$**:** V tomto případě posloupnost $\{x^{m+1}\}$ nemá limitu, protože $x^{2m+1} \to -\infty$ a $x^{2m+2} \to +\infty$ (jak víme z Kapitoly II), a tedy podle věty o aritmetice limit (poznamenávám, že $x - 1 < 0$) je

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = +\infty \text{ a } \lim_{m\to\infty} s_{2m+1} = -\infty.$$

   Tedy $\lim s_m$ neexistuje, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverguje a nemá součet.

   $x = -1$**:** V tomto případě $s_{2m} = 0$ a $s_{2m+1} = -1$. Tedy $\lim s_m$ neexistuje, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverguje a nemá součet.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$:

Tento příklad je zahrnut v předchozím pro $x = -1$, ale stojí za to si ho probrat ještě zvlášť.

Jest

$$\begin{aligned}
s_1 &= -1, \\
s_2 &= -1 + 1 = 0, \\
s_3 &= -1 + 1 - 1 = -1, \\
s_4 &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0, \\
&\vdots \\
s_{2m} &= \underbrace{\underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0} - \dots \underbrace{-1+1}_{0}}_{m\text{-krát}} = 0 \\
s_{2m+1} &= \underbrace{\underbrace{-1+1}_{0}\underbrace{-1+1}_{0} - \dots \underbrace{-1+1}_{0}}_{m\text{-krát}} -1 = -1, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tedy $\lim s_m$ neexistuje a řada nemá součet.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Uvědomme si, že

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

a proto

$$\begin{aligned}
s_m &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(m-1)m} + \frac{1}{m(m+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1} - \cancel{\frac{1}{m}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{m}} - \frac{1}{m+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{m+1} \to 1,
\end{aligned}$$

tedy řada konverguje a její součet je 1.

(Vzorec $s_m = 1 - \frac{1}{m+1}$ lze též snadno dokázat matematickou indukcí.)

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

   Částečné součty mají tvar

$$s_m = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

   Posloupnost $\{s_m\}$ je zřejmě rostoucí. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti má limitu.

   Pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2m} - s_m = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq \underbrace{\frac{1}{2m} + \cdots + \frac{1}{2m}}_{m\text{-krát}} = m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2},$$

   neboli $s_{2m} \geq s_m + \frac{1}{2}$. Protože $s_1 = 1$, dostaneme

$$s_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$$

   pro $k \in \mathbb{N}$. Speciálně $s_{2^k} \to +\infty$.

   Protože $\lim s_m$ existuje, nutně $s_m \to +\infty$ (díky větě o limitě vybrané posloupnosti). Proto řada diverguje a její součet je $+\infty$.

6. Uvažme řadu

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ldots,$$

   tj. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k+1} \text{ a } a_{2k} = -\frac{1}{k+1} \text{ pro } k \in \mathbb{N}.$$

   Je vidět, že pro $m \in \mathbb{N}$ platí

$$s_{2m-1} = a_{2m-1} = \frac{1}{m+1} \text{ a } s_{2m} = 0.$$

   Tedy $s_{2m-1} \to 0$ i $s_{2m} \to 0$, a tedy $s_m \to 0$. Proto řada konverguje a má součet 0.

7. Uvažme řadu

$$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots,$$

tj. řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{pokud } n \text{ je dělitelné } 3, \\ 1, & \text{pokud } n \text{ není dělitelné } 3. \end{cases}$$

Vidíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 1,$$

protože dva ze sčítanců se rovnají 1 a jeden se rovná -1. Proto pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$s_{3k} = k, s_{3k+1} = k + 1, s_{3k+2} = k.$$

Tudíž $s_m \to +\infty$ (například díky tomu, že $s_m \geq \frac{m}{3}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$). Tedy řada diverguje a má součet $+\infty$.

Poznámka: Porovnejme řady z příkladů 3 a 7. Tyto dvě řady mají stejné členy, ale jsou uspořádány v jiném pořadí.

V obou příkladech jsou řady tvořeny pouze čísly 1 a -1, přičemž každé z nich se opakuje nekonečněkrát.

V příkladu 3 jsou uspořádány tak, že se pravidelně střídají (začneme s -1, přičteme 1, pak -1, pak zas 1, atd.). Proto částečné součty jsou střídavě -1 a 0 a řada nemá součet.

V příkladu 7 jsou členy řady uspořádané jinak – po dvou členech 1 vždy následuje jednou -1. Tedy částečné součty se tvoří dle schématu „dva kroky vpřed a jeden vzad“. Proto mají limitu $+\infty$. (Jiným uspořádáním, například „jeden krok vpřed a dva vzad“, bychom mohli docílit toho, aby součet byl $-\infty$.)

Toto porovnání ukazuje, že předpoklad, že máme čísla, která chceme sečíst, uspořádána do posloupnosti, je důležitý. Pokud tatáž čísla uspořádáme jinak, můžeme dojít k jinému výsledku. Ještě lepší ilustrací jsou následující dva příklady řad s jinak uspořádanými členy řady z příkladu 6.

8. Uvažme řadu

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}-\frac{1}{5}+\dots$$

Tato řada má stejné členy jako řada z příkladu 6, ale jsou jinak uspořádané. Kladné členy se vyskytují „výrazně častěji". Po stejném začátku

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$

se bloky kladných členů

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8},\ \frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16},\ \dots,\ \frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}},\ \dots$$

pravidelně střídají s jedotlivými zápornými členy

$$-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ \dots,\ -\frac{1}{k+2},\ \dots$$

Součet prvních $k+2+2^{k+1}$ členů řady je

$$\begin{aligned} s_{k+2+2^{k+1}} &= \underbrace{1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}+\underbrace{\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{5} \\ &\qquad +\dots+\underbrace{\frac{1}{2^k+1}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}}_{\geq\frac{1}{2}}-\frac{1}{k+2} \\ &\geq \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{=\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}_{\geq\frac{1}{6}}+\dots+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}}_{\geq\frac{1}{6}}}_{k\text{-krát}}\geq\frac{k}{6}\to+\infty \end{aligned}$$

Všimněme-si, že pro každé $m \geq k+2+2^{k+1}$ je $s_m \geq s_{k+2+2^{k+1}} \geq \frac{k}{6}$:

Pokud přičítáme kladné členy, částečný součet se zvětší. O něco klesne jen při přičtení záporného členu. Ale klesne o méně, než činí přírůstek za předchozí blok kladných členů, jak plyne z předchozího výpočtu.

Nyní snadno dokážeme, že $s_m \to +\infty$:

Nechť $C \in \mathbb{R}$ je libovolné. Protože $\frac{k}{6} \to +\infty$, existuje k_0, že pro $k \geq k_0$ je $\frac{k}{6} > C$. Pak pro $m \geq k_0+2+2^{k_0+1}$ je $s_m \geq s_{k_0+2+2^{k_0+1}} \geq \frac{k_0}{6} > C$.

Tedy řada diverguje a má součet $+\infty$.

9. Uvažme řadu

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}-\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{8}+\ldots$$

Tato řada má stejné členy jako řady v příkladech 6 a 8, ale v jiném pořadí. Tentokrát se pravidelně střídají bloky kladných členů (stejné jako v příkladu 8) a jim odpovídající bloky záporných členů.

Pro částečné součty dostáváme

$$s_2=0,\ s_4=0,\ s_8=0,\ s_{16}=0,\ \ldots$$

Obecně $s_{2^k}=0$ pro každé $k\in\mathbb{N}$. Na druhou stranu pro každé $k\in\mathbb{N}$ je

$$s_{2^k+2^{k-1}}=\underbrace{s_{2^k}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}}_{\geq\frac{1}{2}}\geq\frac{1}{2}.$$

Z toho vyplývá, že $\lim s_m$ neexistuje (jedna vybraná posloupnost má limitu 0, jiná vybraná posloupnost je zdola omezená číslem $\frac{1}{2}$, tedy rozhodně nemá limitu 0). Řada tedy nemá součet.

K Větě VII.1:

- Důkaz je velmi snadný: Předpokládejme, že řada konverguje. Pak jejím součtem je nějaké reálné číslo, označme je s. Součet je definován jako limita posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}$. Máme tedy $s_n\to s$.

  Nyní si uvědomíme, že $s_{n+1}-s_n=a_{n+1}$, a tedy

  $$\lim a_{n+1}=\lim(s_{n+1}-s_n)=\lim s_{n+1}-\lim s_n=s-s=0,$$

  kde jsme použili větu o aritmetice limit.

  Tedy $a_{n+1}\to 0$, což je totéž jako $a_n\to 0$.

- V důkazu bylo podstatné, že součtem je reálné číslo, abychom mohli použít větu o aritmetice limit (aby byl definován rozdíl $s-s$).

- Tato věta se nazývá „nutná podmínka konvergence“. Tedy, k tomu, aby řada $\sum_n a_n$ konvergovala, je nutné, aby $a_n\to 0$.

  Podmínka ovšem není postačující. Může se stát, že $a_n\to 0$, a přitom řada $\sum_n a_n$ diverguje. Svědčí o tom například příklady 5, 8, 9.

- Význam a použití této věty: Tato věta je důležitá pro pochopení, co znamená konvergence řady a používá se v důkazech řady dalších vět.

  Kromě toho dává snadné kritérium, jak poznat, že některé řady divergují. Pokud $a_n \not\to 0$, pak $\sum_n a_n$ diverguje.

  Tak například to, že řady z příkladů 3 a 7 divergují plyne ihned z Věty VII.1. Ale tato věta nám neumožní rozlišit, zda řada má součet $+\infty$, $-\infty$, nebo nemá součet.

- Další příklad na aplikaci: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ konverguje, právě když x je celočíselný násobek π.

  Pokud x je celočíselný násobek π, pak $\sin(nx) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy všechny členy řady jsou nulové. Proto řada konverguje a má součet 0.

  Předpokládejme, že x není celočíselný násobek π. Pak $\sin(nx) \not\to 0$. To se dá dokázat následujícím známým trikem:

  Nechť $\sin(nx) \to 0$. Pak i $\sin((n+2)x) \to 0$, podle věty o aritmetice limit je
  $$\sin((n+2)x) - \sin(nx) \to 0.$$
  Podle goniometrických vzorečků víme, že
  $$\sin((n+2)x) - \sin(nx) = 2\cos\tfrac{(n+2)x+nx}{2}\sin\tfrac{(n+2)x-nx}{2} = 2\cos((n+1)x)\sin x.$$
  Tedy
  $$2\cos((n+1)x)\sin x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$
  Protože x není celočíselný násobek π, je $\sin x \neq 0$, a tedy
  $$\cos((n+1)x) \to 0.$$
  Protože dle předpokladu je i $\sin((n+1)x) \to 0$, věta o aritmetice limit dává
  $$\sin^2((n+1)x) + \cos^2((n+1)x) \to 0^2 + 0^2 = 0.$$
  Výraz na levé straně je však roven 1, tedy dostáváme $1 \to 0$, což je spor.

  Máme tedy $\sin(nx) \not\to 0$, a tedy řada diverguje.

Cvičení: Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$ *nekonverguje pro žádné* $x \in \mathbb{R}$.

K Větičce VII.2:

- Důkaz snadno plyne z věty o aritmetice limit:

  (i) Nechť s_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n a_n$. Pak m-tý částečný součet řady $\sum_n \lambda a_n$ je roven λs_m a zřejmě

  $$\lim \lambda s_m = \lambda \lim s_m.$$

  (ii) Nechť s_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n a_n$ a t_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n b_n$. Pak m-tý částečný součet řady $\sum_n (a_n + b_n)$ je roven $s_m + t_m$ a zřejmě

  $$\lim(s_m + t_m) = \lim s_m + \lim t_m.$$

- Protože máme větu o aritmetice limit i pro nevlastní limity, lze větu modifikovat i pro řady se součtem $+\infty$ nebo $-\infty$. Pak v bodě (i) je třeba rozlišit znaménka a v bodě (ii) je třeba přidat předpoklad „je-li součet na pravé straně definován“.

- Přímé použití této věty ilustrují následující příklady:

  – $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n(n+1)})$ konverguje a její součet je $1+1 = 2$ (viz příklady 2 a 4).

  – $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{2^n}) = +\infty$ (viz příklady 5 a 2).

- Věta lze použít i nepřímo. Ilustruje to následující příklad:

  Nechť a_n je n-tý člen řady z příkladu 9. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \frac{1}{2^n})$ diverguje a nemá součet.

  Předpokládejme totiž, že tato řada má součet s. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ (viz příklad 2) a

  $$a_n = (a_n + \frac{1}{2^n}) - \frac{1}{2^n},$$

  dostaneme

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - 1.$$

  To je ale spor s tím, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemá součet (podle příkladu 9). Proto řada z tohoto příkladu nemá součet.

K závěrečným poznámkám

(1) Nechť s_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n a_n$ a t_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n b_n$.

Z předpokladu plyne, že pro $m \geq n_0$ je $s_m - s_{n_0} = t_m - t_{n_0}$, neboli

$$t_m = s_m - s_{n_0} + t_{n_0} \text{ a } s_m = t_m - t_{n_0} + s_{n_0}.$$

Proto je (z věty o aritmetice limit) zřejmé, že

$$\sum_n a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \lim s_m \text{ existuje vlastní}$$
$$\Leftrightarrow \lim t_m \text{ existuje vlastní} \Leftrightarrow \sum_n b_n \text{ konverguje}$$

Tedy, pokud jedna z řad konverguje, konverguje i druhá (a pokud jedna diverguje, diverguje i druhá). Pokud řady konvergují, jejich součet se liší o $s_{n_0} - t_{n_0}$.

(2) Tento případ je podobný: Nechť s_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n a_n$ a t_m je m-tý částečný součet řady $\sum_n a_{n+N-1}$. Pak pro každé $m \geq N$ platí

$$s_m = s_{N-1} + t_{m-N+1}.$$

Tedy, pokud konverguje řada $\sum_n a_{n+N-1}$, konverguje i řada $\sum_n a_n$ (a součty se liší o s_{N-1}).

Obráceně, pro $m \geq 1$ je

$$t_m = s_{N-1+m} - s_{N-1},$$

tedy, konverguje řada $\sum_n a_n$, konverguje i řada $\sum_n a_{n+N-1}$.

- Tato poznámka se často vyjadřuje intuitivním tvrzením, že „prvních pár členů konvergenci řady neovlivní“. Tedy neovlivní to, zda řada konverguje nebo ne, samozřejmě může ovlivnit hodnotu součtu.