K oddílu VII.2 – první část (řady s nezápornými členy, absolutní konvergence, srovnávací kritéria)

Úvodní poznámky:

- Základní úlohou, kterou se zabýváme v této kapitole, není úloha sečíst danou nekonečnou řadu, ale úloha zjistit, zda daná řada konverguje nebo diverguje.

  Důvodem je to, že řad, které je možné nějakým způsobem přesně sečíst, je velmi málo. Kromě toho metody sčítání řad (těch, které je možné přesně sečíst) jsou hodně pokročilé.

  Pokud zjistíme, že nějaká řada konverguje, pak můžeme její součit určit přibližně tak, že ho nahradíme některým částečným součtem. Tedy, místo abychom sečetli nekonečně mnoho čísel (což neumíme), sečteme jen dostatečně velký konečný počet čísel. Bylo by dobré vědět, co je to „dostatečně velký“, tj. kolik členů musíme sečíst, abychom dosáhli požadované přesnosti. I na to existují metody, ale tím se v tuto chvíli zabývat nebudeme.

  Dalším důvodem pro zjišťování konvergence je skutečnost, že některé veličiny či funkce se přirozeně vyjadřují jako součet nekonečné řady (příklady uvidíme v Matematice III) a potřebujeme vědět, že příslušné vzorce dávají smysl.

- Řady s nezápornými členy mají některé speciální vlastnosti:

  Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, jejíž členy jsou nezáporné, tj. $a_n \geq 0$ pro každé n. Připomeňme, že částečné součty jsou definované vzorcem

  $$s_m = a_1 + \cdots + a_m.$$

  Je zřejmé, že posloupnost $\{s_m\}$ je v tomto případě neklesající

  $$(\text{protože } s_{m+1} = s_m + a_{m+1} \geq s_m \text{ pro každé } m \in \mathbb{N}),$$

  a tedy $\lim s_m$ vždy existuje podle věty o limitě monotónní posloupnosti. Podle zmíněné věty máme tedy dvě možnosti:

  1. Posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená. Pak má vlastní limitu, a tedy řada konverguje.

2. Posloupnost $\{s_m\}$ není shora omezená. Pak $\lim s_m = +\infty$. Tedy řada diverguje a má součet $+\infty$.

Nemůže se tedy stát, že by řada s nezápornými členy neměla součet.

K Větě VII.3:

- Důkaz bodu (i):

  Nechť $\{s_m\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\{t_m\}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tedy

  $$\begin{aligned} s_m &= a_1 + a_2 + \cdots + a_m, \\ t_m &= b_1 + b_2 + \cdots + b_m. \end{aligned}$$

  Z předpokladu $0 \leq a_n \leq b_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ plyne, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ je

  $$0 \leq s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_m = t_m. \qquad (*)$$

  Pokud řada $\sum_n b_n$ konverguje, znamená to, že posloupnost $\{t_m\}$ má vlastní limitu, a tedy je shora omezená.

  Z $(*)$ pak plyne, že i posloupnost $\{s_m\}$ je shora omezená (stejnou horní závorou).

  Protože posloupnost $\{s_m\}$ je navíc neklesající, musí mít vlastní limitu (podle věty o limitě monotónní posloupnosti). To ovšem znamená, že řada $\sum_n a_n$ konverguje a důkaz je hotov.

- Důkaz bodu (ii): Bod (ii) plyne ihned z (i), protože jeho obsahem je implikace, která je obměnou implikace z bodu (i).

- Intuitivní vyjádření:

  Máme-li řadu s nezápornými členy, pak konverguje, právě když posloupnost částečných součtů je shora omezená.

  Tedy, pro řadu s menšími členy je „snažší konvergovat“ a pro řadu s většími členy je „těžší konvergovat“.

- Příklady použití:

  1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konverguje:
     Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zřejmě platí
     $$0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$
     Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverguje podle příkladu 2 z oddílu VII.1. Tedy i naše řada konverguje (podle bodu (i)).
  2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.
     Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
     $$0 \leq \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{2}{n(n+1)}$$
     (protože $n + 1 \leq n + n = 2n$).
     Podle příkladu 4 z oddílu VII.1 řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konverguje.
     Podle Větičky VII.2(i) konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.
     Nakonec z bodu (i) plyne, že i naše řada konverguje.
  3. Pro každé $\alpha > 2$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje.
     Stačí použít bod (i), předchozí příklad a skutečnost, že
     $$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$
  4. Pro každé $\alpha < 1$ řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje.
     Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí
     $$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$
     Protože řada $\sum_n \frac{1}{n}$ diverguje (viz příklad 5 z oddílu VII.1), podle bodu (ii) diverguje i naše řada.

K Větě VII.4:

- Pomocné značení:

  Pro $x \in \mathbb{R}$ značíme

$$
\begin{aligned}
x^+ &= \max\{x, 0\} \qquad &&\text{(kladná část čísla } x\text{)},\\
x^- &= \max\{-x, 0\} \qquad &&\text{(záporná část čísla } x\text{)}.
\end{aligned}
$$

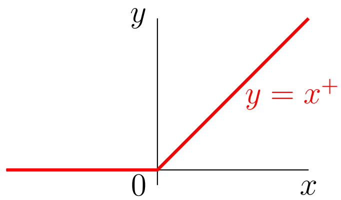
  Tedy

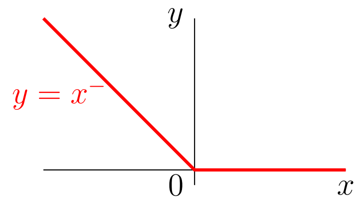
$$
x^+ = \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0, \\ 0, & \text{pokud } x < 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad x^+ = \begin{cases} 0, & \text{pokud } x \geq 0, \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}
$$

  Pak platí $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, $x = x^+ - x^-$ a $|x| = x^+ + x^-$. (Poznamenejme, že navzdory svému názvu je záporná část čísla vždy nezáporné číslo.)

  Funkce $x \mapsto x^+$ a $x \mapsto x^-$ jsou důležité funkce, které budeme používat i později. (S první z nich se pod názvem „kladná hodnota čísla" můžete setkat i ve formuláři pro daňové přiznání.)

  Grafy těchto funkcí jsou zachyceny na následujících obrázcích:





  Kladnou a zápornou část čísla budeme používat nikoli pro jednotlivá čísla, ale hlavně pro posloupnosti a později i pro funkce.

  Například, pokud $a_n = (-1)^n$, tj. posloupnost $\{a_n\}$ má tvar

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

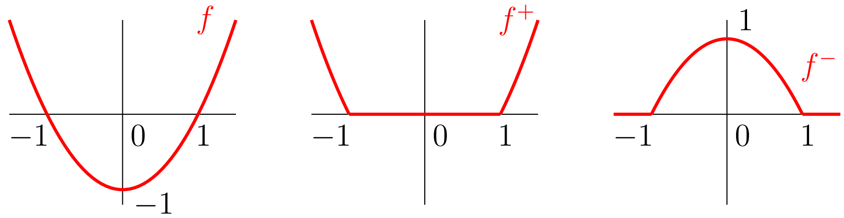
  Posloupnost $\{a_n^+\}$ má pak tvar

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

  a posloupnost $\{a_n^-\}$ má tvar

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

Pro funkce (což využijeme až později, v Matematice III) to můžeme ilustrovat na funkci $f(x) = x^2 - 1$. Na prvním obrázku je graf funkce f, na druhém graf f^+ a na třetím graf f^-. Je vidět, že $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.



- Důkaz Věty VII.4:

  Předpokládejme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

  Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

  $$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \quad \text{a} \quad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|,$$

  podle bodu (i) Věty VII.3 konvergují i řady

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

  Protože pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

  $$a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

  podle Větičky VII.2 konverguje i řada

  $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

  Tím je důkaz hotov.

- Tato věta ospravedlňuje zavedení termínu absolutní konvergence. Plyne z ní totiž, že absolutně konvergentní řada je i konvergentní, takže absolutní konvergence je silnější formou konvergence.

- Věta VII.4 je formulována jako implikace. Obrácená implikace neplatí. O tom svědčí například příklad 6 z oddílu VII.1.

  Pokud členy této řady označíme a_n, pak z příkladu víme, že $\sum_n a_n$ konverguje.

  Přitom však $|a_n| \geq \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tedy $\sum_n |a_n|$ diverguje (používáme příklad 5 z oddílu VII.1 a Větu VII.3(ii)).

- Pokud řada konverguje, ale nekonverguje absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Více příkladů takových řad bude v oddílu VII.3.

- Příklad: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ konverguje.

  Protože
  $$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$
  pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje (viz příklad 2 ke komentáři k Větě VII.3), podle Věty VII.3(i) konverguje i řada
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| .$$
  Z Věty VII.4 pak plyne, že řada
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$
  konverguje též.

K Větě VII.3':

- Tato věta plyne z Věty VII.3 a toho, že konvergence řady nezávisí na „chování prvních pár členů řady“ (viz závěrečná poznámka v oddílu VII.1).

- Bod (i) lze tedy dokázat například takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \overset{\text{Poznámka (2)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \text{ konverguje}$$
$$\overset{\text{Věta VII.3(i)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ konverguje}$$
$$\overset{\text{Poznámka (2)}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

  kde Poznámka (2) je ta, která je na konci oddílu VII.1.

- Bod (ii) opět plyne z bodu (i) pomocí obměny implikace.

K Větě VII.5:

- Důkaz bodu (a):

  Předpokládejme, že existuje vlastní limita $L = \lim \frac{a_n}{b_n}$ a že řada $\sum_n b_n$ konverguje.

  Protože $a_n \geq 0$ a $b_n \geq 0$ pro každé n, nutně $L \geq 0$. Navíc existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $b_n > 0$ (aby byl podíl $\frac{a_n}{b_n}$ definován).

  Z definice limity (nebo z věty o limitě a uspořádání) plyne, že existuje takové $n_1 \in \mathbb{N}$, že
$$\forall n \geq n_1 : \frac{a_n}{b_n} < L + 1.$$
  Protože pro $n \geq n_1$ je $\frac{a_n}{b_n}$ definováno, musí platit $b_n > 0$. Proto můžeme uvedenou nerovnost vynásobit b_n a dostaneme
$$\forall n \geq n_1 : a_n < (L + 1)b_n.$$

  Protože $\sum_n b_n$ konverguje, podle Větičky VII.2 konverguje také řada $\sum_n (L + 1)b_n$.

  Podle Věty VII.3'(i) (připomeňme, že $a_n \geq 0$ pro každé n) nyní dostaneme, že konverguje i řada $\sum_n a_n$.

  Tím je důkaz proveden.

- Důkaz bodu (b):

  Tento bod plyne z bodu (a):

  Implikace
$$\sum_n b_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_n a_n \text{ konverguje}$$
  plyne z bodu (a) přímo (je to speciální případ).

  Dokažme tedy implikaci
$$\sum_n a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \sum_n b_n \text{ konverguje}.$$
  Nechť $\sum_n a_n$ konverguje. Z předpokladu a věty o aritmetice limit plyne, že
$$\lim \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c}.$$
  Limita je vlastní, a tedy aplikací bodu (a) dostaneme, že $\sum_n b_n$ konverguje.

- Důsledkem bodu (a) je i následující tvrzení (které se občas může hodit):

  Nechť $\sum_n a_n$ a $\sum_n b_n$ jsou řady s nezápornými členy a $\lim \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Pokud řada $\sum_n b_n$ diverguje, pak také řada $\sum_n a_n$ diverguje.

  Důkaz: Z Věty o aritmetice limit plyne $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$. Proto toto tvrzení plyne z bodu (a) pomocí obměny implikace.

- Intuitivní vyjádření a pomůcky k zapamatování:

  Jak bylo již řečeno výše, pro řady s nezápornými členy platí, že pro řadu s menšími členy je „snažší konvergovat“ a pro řadu s většími členy je „těžší konvergovat“.

  K porovnání členů řad lze využít limitu. Zhruba řečeno platí:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{členy posloupnosti } \{a_n\} \text{ jsou} \\ & \qquad \text{„výrazně menší než“ členy posloupnosti } \{b_n\}, \\ c \in (0,+\infty) & \Rightarrow \text{členy posloupnosti } \{a_n\} \text{ jsou} \\ & \qquad \text{„zhruba stejně velké jako“ členy posloupnosti } \{b_n\}, \\ +\infty & \Rightarrow \text{členy posloupnosti } \{a_n\} \text{ jsou} \\ & \qquad \text{„výrazně větší než“ členy posloupnosti } \{b_n\}. \end{cases}$$

Proto by měla být platnost Věty VII.5 intuitivně přirozená.

- Aplikace pro řady, které nemusí mít nezáporné členy:

  Nechť $\sum_n a_n$ a $\sum_n b_n$ jsou dvě řady, přičemž druhá z nich má nezáporné členy a existuje vlastní limita $\lim \left|\frac{a_n}{b_n}\right|$. Pokud řada $\sum_n b_n$ konverguje, pak také řada $\sum_n a_n$ konverguje (dokonce absolutně).

  Důkaz: Nechť $\sum_n b_n$ konverguje. Z bodu (a) plyne, že konverguje řada $\sum_n |a_n|$. Nakonec použijeme Větu VII.4.