K oddílu VII.3 – Leibnizovo kritérium

K Větě VII.9

- O předpokladech:

  Členy řady jsou tvaru $(-1)^n a_n$, řada má tedy tvar

  $$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 - \dots$$

  Druhý předpoklad, tj. $a_n \to 0$, je vlastně nutná podmínka konvergence. Již z kapitoly II totiž víme, že

  $$a_n \to 0 \Longleftrightarrow (-1)^n a_n \to 0.$$

  První předpoklad říká jednak to, že $a_n \geq 0$ pro každé n, tedy členy řady pravidelně střídají znaménka (členy s lichými indexy jsou ≤ 0 a členy se sudými indexy jsou ≥ 0); a pak to, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.

- Důkaz věty:

  Nechť $\{s_m\}$ značí posloupnost částečných součtů. Chceme dokázat, že řada konverguje, tj., že posloupnost $\{s_m\}$ má vlastní limitu. To uděláme v několika krocích.

  Krok 1: Posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je neklesající:

  $$s_{2(m+1)-1} = s_{2m+1} = s_{2m-1} + \underbrace{a_{2m} - a_{2m+1}}_{\geq 0} \geq s_{2m-1}.$$

  Krok 2: Posloupnost $\{s_{2m}\}$ je nerostoucí:

  $$s_{2(m+1)} = s_{2m+2} = s_{2m} \underbrace{-a_{2m+1} + a_{2m+2}}_{\leq 0} \leq s_{2m}.$$

  Krok 3: Posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je shora omezená, a to číslem s_2:

  Platí $s_{2m} = s_{2m-1} + a_{2m}$, tedy

  $$s_{2m-1} = s_{2m} - a_{2m} \leq s_{2m} \overset{\text{Krok 2}}{\leq} s_2.$$

Krok 4: Posloupnost $\{s_{2m}\}$ je zdola omezená, a to číslem s_1:

Platí

$$s_{2m} = s_{2m-1} + a_{2m} \geq s_{2m-1} \overset{\text{Krok 1}}{\geq} s_1.$$

Krok 5: Existují vlastní limity $s = \lim_{m\to\infty} s_{2m-1}$ a $t = \lim_{m\to\infty} s_{2m}$.

Víme, že posloupnost $\{s_{2m-1}\}$ je neklesající (Krok 1) a shora omezená (Krok 3), podle věty o limitě monotónní posloupnosti má tedy vlastní limitu.

Podobně víme, že posloupnost $\{s_{2m}\}$ je nerostoucí (Krok 2) a zdola omezená (Krok 4), podle věty o limitě monotónní posloupnosti má tedy vlastní limitu.

Krok 6: Platí $s = t$:

$$t = \lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} (s_{2m-1}+a_{2m}) \overset{AL}{=} \lim_{m\to\infty} s_{2m-1} + \lim_{m\to\infty} a_{2m} = s+0 = s.$$

Krok 7: Závěr: Víme, že posloupnosti $\{s_{2m-1}\}$ a $\{s_{2m}\}$ mají vlastní limitu, a navíc stejnou limitu. Proto je tato společná hodnota limitou posloupnosti $\{s_m\}$ a důkaz je hotov.

- Varianta věty: Za stejných předpokladů konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. Jde totiž o řadu $\sum_{n=1}^{\infty} -(-1)^n a_n$ a stačí použít Větičku VII.2.

  Tedy podstatné je to, že se znaménka pravidelně střídají, ale nezáleží na tom, kterým znaménkem se začíná.

- Mírné zobecnění věty: První z podmínek lze nahradit slabší variantou:

  $$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0 : a_{n+1} \geq a_n \geq 0.$$

  I v tomto případě dostaneme, že řada konverguje.

  To plyne z poznámky (2) na konci oddílu VII.1.

- Příklad na aplikaci věty:

  Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje, protože $\{\frac{1}{n}\}$ je klesající posloupnost s limitou 0.

- O nutnosti předpokladů:

– Předpoklad, že $a_n \to 0$ je nutný. Pokud totiž $a_n \not\to 0$, pak řada diverguje podle Věty VII.1.

– První předpoklad, to jest ten, že $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel, je potřebný, ale ne zcela nutný.

Že **je potřebný** znamená, že v případě, že není splněn, řada konvergovat nemusí. O tom svědčí například řada

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \dots,$$

tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a$, kde

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n} \text{ a } a_{2n} = \frac{1}{2n} \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Členy této řady pravidelně střídají znaménka a mají limitu 0. Podmínka monotonie však neplatí.

Pro částečné součty platí:

$$\begin{aligned}
s_2 &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot 1, \\
s_4 &= s_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\
s_6 &= s_4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\
&\vdots \\
s_{2m+2} &= s_{2m} - \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2(m+1)} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2(m+1)} \\
&= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1}\right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tedy $s_{2m} \to -\infty$ (podle příkladu 5 z oddílu VII.1).

Řada tedy diverguje. (Lze snadno ukázat, že $s_m \to -\infty$, a tedy řada má součet $-\infty$.)

Že předpoklad **není zcela nutný** znamená, že řada může konvergovat i v případě, že není splněn. O tom svědčí například řada

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots,$$

tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a$, kde

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2^n} \text{ a } a_{2n} = \frac{1}{3^n} \text{ pro } n \in \mathbb{N}.$$

Členy této řady pravidelně střídají znaménka a mají limitu 0. Podmínka monotonie však neplatí.

Nicméně řada konverguje absolutně, tj. konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Důvod je ten, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}},$$

což ověříme rozlišením sudých a lichých indexů:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{2n-1}{2}}},$$
$$a_{2n} = \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{\frac{2n}{2}}}.$$

Protože $\sum_n \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ konverguje (je to geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{\sqrt{2}}$), podle srovnávacího kritéria naše řada konverguje absolutně.

- Shrnutí: Věta VII.9 dává jistou postačující podmínku pro konvergenci. Tedy, máme-li řadu jistého speciálního tvaru, která splňuje uvedené podmínky, pak řada konverguje.

  Věta VII.9 není určena pro důkaz divergence řady. Pokud nejsou splněny předpoklady, pak prostě nevíme. Řada konvergovat nemusí, ale také může. Pro vyšetření je třeba zvolit jinou metodu.

- Poznámka: Věta se obvykle používá k důkazu konvergence řad, které nejsou absolutně konvergentní. Ale sama o absolutní konvergenci nic neříká.

  Lze použít k důkazu konvergence výše uvedené řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, která není absolutně konvergentní. Tato řada je tedy neabsolutně konvergentní.

  Lze ovšem použít i k důkazu konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, která rovněž splňuje předpoklady. Tato řada je ovšem absolutně konvergentní, takže její konvergenci lze dokázat i jinak (z Věty VII.4).