Vyšetřování konvergence řad – pokračování

Metody řešení:

- V předchozí várce příkladů jsme probrali metody, jak vyšetřovat řady s nezápornými členy či absolutní konvergenci. Nyní se zaměříme i na neabsolutní konvergenci.
- Úloha vyšetřit konvergenci řady $\sum_n a_n$ může mít tři různé výsledky:
  - Řada $\sum_n a_n$ konverguje absolutně.

    To znamená, že konverguje řada $\sum_n |a_n|$ (podle Věty VII.4 pak konverguje i řada $\sum_n a_n$).

    Pro důkaz absolutní konvergence můžeme použít některou z vět z oddílu VII.2.
  - Řada $\sum_n a_n$ diverguje.

    K důkazu divergence se používá například nutná podmínka konvergence (Věta VII.1), odmocninové či podílové kritérium.

    Pro řadu s nezápornými členy lze použít i limitní srovnávací kritérium v kombinaci s Větou VII.8.
  - Řada $\sum_n a_n$ konverguje neabsolutně.

    To znamená, že řada $\sum_n a_n$ konverguje, ale řada $\sum_n |a_n|$ diverguje.

    Pro důkaz neabsolutní konvergence musíme tedy dokázat dvě věci:
    * Divergenci řady $\sum_n |a_n|$.
      K tomu se nejčastěji použije limitní srovnávací kritérium v kombinaci s Větou VII.8.
      Tuto část obvykle dokazujeme jako první. Kdyby nám totiž vyšlo, že řada $\sum_n |a_n|$ konverguje, dostali bychom absolutní konvergenci a řešení by bylo hotovo.
    * Konvergenci řady $\sum_n a_n$.
      Pro tento případ máme vpodstatě jedinou možnost, a to použít Leibnizovo kritérium. To lze ovšem použít jen pro řady ve velmi speciálním tvaru.
      Pokud by nešlo použít Leibnizovo kritérium, pak by nezbývalo než vymyslet nějakou další metodu.
- Aplikace Leibnizova kritéria:

– Leibnizovo kritérium je použitelné pouze pro řady ve speciálním tvaru. Základní předpoklad je, že řada pravidelně střídá znaménka, tj., že je tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{nebo} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n,$$

kde $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel.

– Dalším předpokladem je, že $a_n \to 0$. To je vlastně nutná podmínka konvergence. (Kdyby nebyla splněna, řada by divergovala.)

– Poslední předpoklad je, že posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.

To lze někdy dokázat přímo, tj. dokážeme, že pro každé n platí $a_{n+1} \leq a_n$.

Pro důkaz monotonie se někdy hodí vztah derivace funkce a monotonie, jak uvidíme na příkladech.

– Předpoklady Lebnizova kritéria nemusí být splněny pro celou posloupnost $\{a_n\}$, stačí, aby byly splněny „od jistého n_0 dále“.

Příklad 20 ze supersemináře – pokračování: V zadaných příkladech je třeba rozhodnout, zda daná řada konverguje absolutně, konverguje neabsolutně či diverguje.

Příklad (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Úvodní úvahy:

  Protože cos je sudá funkce, je $\cos\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$, a tedy naše řada má tvar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}$.

  Dále, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{\sqrt{n}} \in (0,1\rangle \subset (0,\frac{\pi}{2})$, tedy $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \in (0,1)$, a proto $\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$.

  Proto má naše řada záporné členy. Tedy pro tuto řadu konvergence a absolutní konvergence znamená totéž.

  Dále tedy budeme vyšetřovat řadu absolutních hodnot, tj. řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

- Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ budeme vyšetřovat postupnou aplikací limitního srovnávacího kritéria.

  Protože $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$ a $\cos\frac{1}{\sqrt{n}} \in (0,1)$ pro každé n, Heineho věta spolu se základní limitou pro logaritmus dává

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{-\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1} = 1.$$

  Protože limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\log\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ konverguje.}$$

  Dále, $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ a $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ pro každé n. Z toho, že $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, pomocí Heineho věty dostaneme

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

  Protože limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

  $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \text{ konverguje.}$$

  Protože $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, kombinací výše odvozených ekvivalencí dostaneme, že řada ze zadání diverguje.

Příklad (k): $\displaystyle\sum_{n=18}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+17n}}$.

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=18}^{\infty}(-1)^n a_n$.

  Protože pro $n \geq 18$ ne $n^2+n > n^2+17 > 0$ a $n^3+n^2 > n^3+17n$, jsou členy řady dobře definovaná a navíc $a_n > 0$ pro $n \geq 18$.

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence:

  Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence. K tomu účelu si upravíme a_n:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+17}}{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt[3]{n^3+17n}}\\
&= \frac{(n^2+n)-(n^2+17)}{(n^3+n^2)-(n^3+17n)}\cdot\frac{(\sqrt[3]{n^3+n^2})^2+\sqrt[3]{n^3+n^2}\cdot\sqrt[3]{n^3+17n}+(\sqrt[3]{n^3+17n})^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+17}}\\
&= \frac{n-17}{n^2-17n}\cdot\frac{n^2\left((\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}})^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{17}{n^2}}+(\sqrt[3]{1+\frac{17}{n^2}})^2\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{17}{n^2}}\right)}\\
&= \frac{(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}})^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{17}{n^2}}+(\sqrt[3]{1+\frac{17}{n^2}})^2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{17}{n^2}}}\xrightarrow{AL}\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

  Pomocí standardních metod výpočtu limit (vhodné rozšíření, vytknutí a vykrácení převládajícího členu, aritmetika limit) jsme spočítali, že $a_n \to \frac{3}{2}$.

  Tedy $\lim(-1)^n a_n$ neexistuje.

- Závěr: Řada diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence.

Příklad (l): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+1}))$.

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

  Protože cos nabývá pouze hodnot z intervalu $\langle -1,1\rangle$, je $1-\cos x \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Proto $a_n \geq 0$ pro každé n.

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence:

  Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence. K tomu účelu si upravíme a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= 1-\cos(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+1}) = 1-\cos\frac{(n^2+7)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}} \\ &= 1-\cos\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}} \end{aligned}$$

  Protože $\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}} \to 0$, je $\cos\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}} \to 1$, a tedy $a_n \to 0$. Nutná podmínka konvergence je tedy splněna.

  Konvergenci řady $\sum_n a_n$ vyšetříme pomocí limitního srovnávacího kritéria:

  Jak už jsme zmínili výše, je $\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}} \to 0$. Protože členy této posloupnosti jsou kladné, z Heineho věty dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}}{\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

  Protože limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right) \text{ konverguje} \\ \iff &\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2 \text{ konverguje} \end{aligned} \qquad (*)$$

Vyšetřeme tedy řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2$. Upravíme její členy:

$$\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2 = \frac{36}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2}.$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{36}{\left(\sqrt{1+\frac{7}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^2} = \frac{36}{4} = 9.$$

Protože limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+1}}\right)^2 \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ konverguje.} \quad (**)$$

Protože $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konverguje, z $(**)$ a $(*)$ plyne, že $\sum_n a_n$ konverguje.

- Závěr: Řada ze zadání konverguje absolutně.

Příklad (m): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[3]{n^2-n}-\sqrt[3]{n^2-2n}\right)$

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

  Protože třetí odmocnina je definována na celém $\mathbb{R}$, jsou všechny členy řady dobře definovány.

  Dále, pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n \le 2n$, a tedy $n^2-n \ge n^2-2n$. Proto $a_n \ge 0$ pro každé n

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence: Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence. K tomu účelu si upravíme a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \sqrt[3]{n^2-n} - \sqrt[3]{n^2-2n} \\
&= \frac{(n^2-n)-(n^2-2n)}{(\sqrt[3]{n^2-n})^2 + \sqrt[3]{n^2-n}\cdot\sqrt[3]{n^2-2n} + (\sqrt[3]{n^2-2n})^2} \\
&= \frac{n}{n^{\frac{4}{3}}\left((\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}})^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{n}\left((\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}})^2\right)}.
\end{aligned}$$

Odsud vidíme nejprve, že $a_n \to 0$. Tedy nutná podmínka konvergence je splněna.

Rovněž vidíme, že

$$\frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\cdot\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}})^2} \to \frac{1}{3}.$$

Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ konverguje.}$$

Protože $\sum_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverguje ~~konverguje~~, dostáváme, že $\sum_n a_n$ diverguje.

Tedy řada ze zadání nekonverguje absolutně, ale splňuje nutnou podmínku konvergence.

- Pokus o použití Leibnizova kritéria:

  Protože řada pravidelně střídá znaménka, nekonverguje absolutně a splňuje nutnou podmínku konvergence, je přirozené se pokusit dokázat, že konverguje s využitím Leibnizova kritéria.

  Zkusme tedy ověřit jeho předpoklady.

  Některé z nich jsme již ověřili: Řada je tvaru $\sum_n (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$ a $a_n \to 0$. Zbývá zjistit, zda posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.

Výše jsme spočítali, že

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}\left((\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}})^2\right)}.$$

Rozmysleme si, co se stane s a_n, pokud se zvětší n:

- Čitatel je roven 1, tedy se nezmění.
- Jmenovatel je součin dvou výrazů.
  První z nich je $\sqrt[3]{n}$. Třetí odmocnina je rostoucí, a tedy první činitel se při zvětšení n také zvětší.
- Podívejme se na druhý z činitelů:
  Pokud zvětšíme n, pak se $\frac{1}{n}$ i $\frac{2}{n}$ zmenší, tedy $1-\frac{1}{n}$ i $1-\frac{2}{n}$ se zvětší.
  Protože třetí odmocnina je rostoucí, zvětší se i $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}$ a $\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}$.
  Dále platí, že pokud máme dvě nezáporná čísla a zvětšíme je, zvětší se i jejich součin (tj. $0 \leq x_1 < x_2$ a $0 \leq y_1 < y_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 y_1 < x_2 y_2$). Pro $n \geq 2$ platí, že jak $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}$, tak i $\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}$ jsou nezáporné. Tedy druhý činitel se zvětší, pokud začínáme s $n \geq 2$.
- Tedy, pokud začínáme s $n \geq 2$, pak se při zvětšení n zvětší i jmenovatel, a proto a_n se zmenší.

Proto $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ je klesající.

To k aplikaci Leibnizova kritéria stačí. Z něj tedy plyne, že řada konverguje.

Poznámka: Výše jsme zdůvodnili, že $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ *je klesající, neboli* $a_{n+1} < a_n$ *pro* $n \geq 2$. *Vysvětlení je psáno tak, aby bylo zřejmé, jak se na to přijde a proč to platí. Zároveň je to zdůvodnění přesné, byť používá mírně intuitivní způsob vyjadřování. Šlo by to samozřejmě zapsat formálněji:*

- *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $0 < \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{n+1}$.
- *Pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *platí* $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} < \sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}}$ *a* $\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} < \sqrt[3]{1-\frac{2}{n+1}}$.
- $\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} \geq 0$ *pro* $n \geq 2$.

– *Pro $n \geq 2$ tedy platí*

$$0 < \sqrt[3]{n}\left((\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{n}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}})^2 \right)$$
$$< \sqrt[3]{n+1}\left((\sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}})^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n+1}} \cdot \sqrt[3]{1-\frac{2}{n+1}} + (\sqrt[3]{1-\frac{2}{n+1}})^2 \right),$$

a tedy

$$0 < a_{n+1} < a_n.$$

- Závěr: Řada ze zadání konverguje neabsolutně.

Příklad (n): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n^2-1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}$

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

  Protože $n^2-1 \geq 0$ i $n^2+n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jsou obě odmocniny dobře definovány.

  Dále, a_n je zlomek. Protože $\sqrt{n^2+n} > \sqrt{n^2} = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je jmenovatel zlomku kladný. Proto jsou všechny členy řady dobře definovány.

  Nakonec, $\sqrt{n^2-1} < \sqrt{n^2} = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy čitatel zlomku je záporný.

  Proto $a_n < 0$ pro každé n.

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{-a_n\}$ a absolutní konvergence: Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence. K tomu účelu si upravíme $-a_n$:

$$-a_n = \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{n^2-(n^2-1)}{(n^2+n)-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n+\sqrt{n^2-1}}$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{n(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}.$$

Odsud vidíme nejprve, že $a_n \to 0$. Tedy nutná podmínka konvergence je splněna.

Rovněž vidíme, že

$$\frac{-a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \to 1.$$

Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ konverguje.}$$

Protože $\sum_n \frac{1}{n}$ konverguje, dostáváme, že $\sum_n(-a_n)$ diverguje.

Tedy řada ze zadání nekonverguje absolutně, ale splňuje nutnou podmínku konvergence.

- Pokus o použití Leibnizova kritéria:

  Protože řada pravidelně střídá znaménka, nekonverguje absolutně a splňuje nutnou podmínku konvergence, je přirozené se pokusit dokázat, že konverguje s využitím Leibnizova kritéria.

  Zkusme tedy ověřit jeho předpoklady.

  Některé z nich jsme již ověřili: Řada je tvaru $\sum_n(-1)^n a_n$, $a_n < 0$ a $a_n \to 0$. Zbývá zjistit, zda posloupnost $\{-a_n\}$ je nerostoucí. Výše jsme spočítali, že

  $$-a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}.$$

  Odsud je snadno vidět, že tato posloupnost je klesající:

  Pokud se zvětší n, zmenší se $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n^2}$.

  Proto se

  - zmenší činitel $\frac{1}{n}$,
  - zmenší čitatel zlomku,

– zvětší jmenovatel zlomku.

Protože všechny tři tyto výrazy jsou kladné, celkově se $-a_n$ zmenší.

Proto je posloupnost $\{-a_n\}$ klesající. Řada ze zadání tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

Poznámka: I tentokrát by uvedené argumenty šlo zapsat formálněji:

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

- $\oplus$ $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$,
- $\oplus$ $\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}+1 < \sqrt{1+\frac{1}{n}}+1$,
- $\oplus$ $1+\sqrt{1-\frac{1}{n+1^2}} > 1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$.

Tedy $-a_{n+1} < -a_n$.

- Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

Příklad (o): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$.

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

  Protože $\operatorname{arctg} x > 0$ pro $x > 0$, je $a_n > 0$ pro každé n.

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence: Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence.

  Máme
$$a_n = \underbrace{\operatorname{arctg} n}_{\to\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}_{\to 0} \xrightarrow{AL} 0.$$

  (Použili jsme Heineho větu a vlastnosti funkce arctg – v $+\infty$ má limitu $\frac{\pi}{2}$ a v 0 má limitu 0.)

  Proto je splněna nutná podmínka konvergence.

Navíc dostáváme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}.$$

Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \text{ konverguje.} \qquad (\circ)$$

Podívejme se tedy na řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$. Z vlastností funkce arctg plyne, že $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$ (viz Větička IV.30(4)). Protože $\frac{1}{n} \to 0$ a $\frac{1}{n} > 0$ pro každé n, z Heineho věty plyne

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \text{ konverguje} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ konverguje.} \qquad (\circ\circ)$$

Protože $\sum_n \frac{1}{n}$ diverguje, z $(\circ)$ a $(\circ\circ)$ dostáváme, že $\sum_n a_n$ diverguje.

Tedy řada ze zadání nekonverguje absolutně, ale splňuje nutnou podmínku konvergence.

- Pokus o použití Leibnizova kritéria:

  Protože řada pravidelně střídá znaménka, nekonverguje absolutně a splňuje nutnou podmínku konvergence, je přirozené se pokusit dokázat, že konverguje s využitím Leibnizova kritéria.

  Zkusme tedy ověřit jeho předpoklady.

  Některé z nich jsme již ověřili: Řada je tvaru $\sum_n (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ a $a_n \to 0$. Zbývá zjistit, zda posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Připomeňme, že

$$a_n = \operatorname{arctg} n \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{n}.$$

Funkce arctg je rostoucí, a proto, zvětšíme-li n, první činitel ($\operatorname{arctg} n$) se zvětší a druhý činitel ($\operatorname{arctg} \frac{1}{n}$) se zmenší. Na první pohled tedy není vidět, zda se jejich součin (tj. a_n) zvětší či zmenší.

Proto musíme a_n vyšetřit podrobněji. Uvědomme si, že pro vyšetřování monotonie posloupností moc nástrojů nemáme, zato pro vyšetřování monotonie funkcí lze využít derivaci.

Všimněme si, že

$$a_n = f(n), \quad \text{kde} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

a funkce f je spojitá na $(0, +\infty)$ (a také na $(-\infty, 0)$, ale to pro řešení příkladu není podstatné).

Spočteme derivaci funkce f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x \cdot \frac{-1}{x^2+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x\right)}_{<0 \ \text{pro} \ x>1}. \end{aligned}$$

Tedy $f' < 0$ na $(1, +\infty)$. Protože f je spojitá na $\langle 1, +\infty)$, je f klesající na $\langle 1, +\infty)$ (věta o vztahu derivace a monotonie funkce, viz Věta IV.34).

Proto i posloupnost $\{a_n\} = \{f(n)\}$ je klesající. Řada ze zadání tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

- Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

Příklad (p): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}}$.

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$0 < \frac{2}{\sqrt{n+4}} < \frac{2}{\sqrt{0+4}} = 1,$$

tedy $\frac{2}{\sqrt{n+4}} \in (0,1) \subset (0, \frac{\pi}{2})$, a proto $\cos \frac{2}{\sqrt{n+4}} \in (0,1)$.

Všechny členy řady jsou tedy dobře definované a navíc je $a_n > 0$ pro každé n.

Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence: Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence.

  Máme
  $$a_n = \frac{1}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

  Nutná podmínka konvergence je tedy splněna.

  Protože $\cos \frac{2}{\sqrt{n+4}} \in (0,1)$, zdá se, že tento sčítanec konvergenci řady $\sum_n a_n$ příliš neovlivní. To vyjádříme přesně použitím limitního srovnávacího kritéria:

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}}_{\in(0,1)}}_{\longrightarrow 0}} = 1.$$

  Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ konverguje.}$$

  Protože $\sum_n \frac{1}{n}$ diverguje, dostáváme, že $\sum_n a_n$ diverguje.

  Tedy řada ze zadání nekonverguje absolutně, ale splňuje nutnou podmínku konvergence.

- Pokus o použití Leibnizova kritéria:

  Protože řada pravidelně střídá znaménka, nekonverguje absolutně a splňuje nutnou podmínku konvergence, je přirozené se pokusit dokázat, že konverguje s využitím Leibnizova kritéria.

  Zkusme tedy ověřit jeho předpoklady.

  Některé z nich jsme již ověřili: Řada je tvaru $\sum_n (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ a $a_n \to 0$. Zbývá zjistit, zda posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí.

  Připomeňme, že

$$a_n = \frac{1}{n + \cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}} \quad \text{a} \quad \cos\frac{2}{\sqrt{n+4}} \in (0,1).$$

  Proto pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1+\underbrace{\cos\frac{2}{\sqrt{n+1+4}}}_{>0}} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+\underbrace{\cos\frac{2}{\sqrt{n+4}}}_{<1}} = a_n$$

  Proto je posloupnost $\{a_n\}$ klesající. Řada ze zadání tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

- Závěr: Řada konverguje neabsolutně.

Modifikace příkladu (n): $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n}$

- Úvodní úvahy:

  Řada je ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

  Protože $n^2 + 1 \geq 0$ i $n^2 + n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, jsou obě odmocniny dobře definovány.

  Dále, a_n je zlomek. Protože $\sqrt{n^2+n} > \sqrt{n^2} = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je jmenovatel zlomku kladný. Proto jsou všechny členy řady dobře definovány.

  Nakonec, $\sqrt{n^2+1} > \sqrt{n^2} = n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy čitatel zlomku je rovněž kladný.

  Proto $a_n > 0$ pro každé n.

  Řada tedy pravidelně střídá znaménka.

- Chování posloupnosti $\{a_n\}$ a absolutní konvergence: Nejprve vyšetříme, zda řada konverguje absolutně, případně, zda je splněna nutná podmínka konvergence. K tomu účelu si upravíme a_n:

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+n}-n} = \frac{(n^2+1)-n^2}{(n^2+n)-n^2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}.$$

  Odsud vidíme nejprve, že $a_n \to 0$. Tedy nutná podmínka konvergence je splněna.

  Rovněž vidíme, že

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \to 1.$$

  Protože tato limita je kladná a vlastní, podle limitního srovnávacího kritéria platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ konverguje.}$$

  Protože $\sum_n \frac{1}{n}$ konverguje, dostáváme, že $\sum_n a_n$ diverguje.

  Tedy řada ze zadání nekonverguje absolutně, ale splňuje nutnou podmínku konvergence.

- Pokus o použití Leibnizova kritéria:

  Protože řada pravidelně střídá znaménka, nekonverguje absolutně a splňuje nutnou podmínku konvergence, je přirozené se pokusit dokázat, že konverguje s využitím Leibnizova kritéria.

  Zkusme tedy ověřit jeho předpoklady.

  Některé z nich jsme již ověřili: Řada je tvaru $\sum_n (-1)^n a_n$, $a_n > 0$ a $a_n \to 0$. Zbývá zjistit, zda posloupnost $\{a_n\}$ je nerostoucí. Výše jsme spočítali, že

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}.$$

Pokud zvětšíme n, pak první činitel $(\frac{1}{n})$ se zmenší, čitatel zlomku se také zmenší a jmenovatel zlomku se také zmenší. Není tedy na první pohled zřejmé, zda se a_n zmenší či zvětší.

Zkusíme tedy využít metody pro vyšetřování monotonie funkcí.

Všimneme si, že

$$a_n = f(\tfrac{1}{n}), \quad \text{kde} \quad f(x) = \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

a f je funkce spojitá na $\langle -1, +\infty)$.

Spočtěme derivaci funkce f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\Big(1\cdot(\sqrt{1+x}+1) + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big)\cdot(\sqrt{1+x^2}+1) - x(\sqrt{1+x}+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2} \\ &= \frac{(2(1+x+\sqrt{1+x})+x)(1+x^2+\sqrt{1+x^2}) - 2x^2(1+x+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2\cdot 2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{(2+3x+2\sqrt{1+x})(1+x^2+\sqrt{1+x^2}) - 2x^2(1+x+\sqrt{1+x})}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2\cdot 2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

Tento výraz je sice komplikovaný, ale je z něj zřejmé, že f' je spojitá na $(-1, +\infty)$ a že $f'(0) = 1$. Tedy $f' > 0$ na $(-\delta, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Proto je f rostoucí na $(-\delta, \delta)$.

Pokud $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\delta}$, pak $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, a tedy $f(\frac{1}{n+1}) < f(\frac{1}{n})$, neboli $a_{n+1} < a_n$.

Máme tedy $a_{n+1} < a_n$ pro $n > \frac{1}{\delta}$, což stačí pro aplikaci Leibnizova kritéria.

Řada ze zadání tedy konverguje podle Leibnizova kritéria.

Poznámka: f' nebylo třeba počítat. Stačilo si uvědomit, že f je třídy C^∞ na $(-1, +\infty)$, a tedy f' je spojitá. Protože $f(0) = 0$, je

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x^2}+1} = 1.$$

- Závěr: Řada konverguje neabsolutně.