K oddílu VI.2 – druhá část (řádkové úpravy a jejich aplikace)

K definici řádkových úprav a transformace:

- Řádkové úpravy jsou tří druhů. Co znamenají úpravy prvního a druhého druhu, je snad zřejmé.
- Úprava třetího druhu je *přičtení nějakého násobku některého řádku k* ***jinému*** *řádku.*

  To jest, zvolíme i, j různá čísla řádků a reálné číslo λ; pak k i-tému řádku přičteme λ-násobek j-tého řádku. Neboli, i-tý řádek nahradíme vektorem

  $$(i\text{-tý řádek}) + \lambda \cdot (j\text{-tý řádek}).$$

- Provést transformaci znamená provést postupně několik řádkových úprav za sebou.
- Nicméně na transformaci lze pohlížet i abstraktněji. Je to konečná posloupnost řádkových úprav, tedy jakýsi předpis, jaké úpravy udělat. Tutéž transformaci můžeme provést na různé matice, stačí aby měly stejný počet řádků. Například následující posloupnost řádkových úprav je transformace použitelná na matice o čtyřech řádcích.

  1. Přehodit první a třetí řádek.
  2. Čtvrtý řádek vynásobit 3.
  3. K druhému řádku přičíst (-2)-násobek třetího řádku.
  4. K čtvrtému řádku přičíst 7-násobek druhého řádku.
  5. Přehodit první a třetí řádek.

- Transformace může být i prázdná posloupnost úprav, tj. příkaz nedělat s maticí nic.

K Větě VI.5:

- Význam této věty: Tato věta dává návod, jak určit hodnost matice. Vezmeme matici, podle bodu (i) ji převedeme na schodovitou. Podle bodu (iii) má vzniklá matice stejnou hodnost jako matice původní. Přitom hodnost schodovité matice je rovna počtu nenulových řádků (jak už víme). Proto stačí spočítat nenulové řádky výsledné matice.

- Důkaz bodu (i): Důkaz provedeme matematickou indukcí podle počtu řádků matice.

  Krok 1, matice o jednom řádku: Pokud matice má jen jeden řádek, už je schodovitá, takže není třeba nic dělat.

  Krok 2, $m \to m+1$: Předpokládejme, že $m \in \mathbb{N}$ je takové, že tvrzení platí pro matice o m řádcích. Nechť $\mathbb{A}$ je matice o $m+1$ řádcích, tedy typu $(m+1) \times n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Budeme postupovat následovně:

  Pokud $\mathbb{A}$ je nulová matice, je již schodovitá a jsme hotovi.

  Pokud $\mathbb{A}$ není nulová, najdeme nejmenší k, pro které k-tý sloupec není nulový.

  Pokud $a_{1k} = 0$, pak zvolíme takové i, že $a_{ik} \neq 0$, a přehodíme prvné a i-tý řádek. Tím dosáhneme toho, že na místě $1k$ je nenulové číslo.

  Můžeme tedy předpokládat, že $a_{1k} \neq 0$. Pak postupně pro $j = 2, \ldots, m+1$ k j-tému řádku přičteme $(-\frac{a_{jk}}{a_{1k}})$-násobek prvního řádku. Tím dosáhneme toho, že v k-tém sloupci je první prvek nenulový a všechny ostatní nulové. Vytvořili jsme tedy „první schod“.

  Nyní použijeme indukční předpoklad: Matici typu $m \times n$, která vznikne vynecháním prvního řádku z výsledné matice, lze dle indukčního předpokladu pomocí jisté transformace převést na schodovitou. Aplikujeme-li tuto transformaci a pak opět přidáme vynechaný první řádek, dostameme schodovitou matici. Tím je důkaz proveden.

- Důkaz bodu (ii): Pokud T_1 znamená nedělat nic, pak za T_2 vezmeme tutéž transformaci, tj. nedělat nic. Dále se podívejme na případ, kdy T_1 je tvořena jednou řádkovou úpravou:

  T_1 je řádková úprava prvního druhu: Pokud T_1 znamená přehodit i-tý a j-tý řádek, pak lze vzít $T_2 = T_1$. (Pokud totiž T_1 aplikujeme podruhé, vrátíme se do původního stavu.)

  T_1 je řádková úprava druhého druhu: Pokud T_1 znamená vynásobit i-tý řádek číslem λ, pak za T_2 vezmeme vynásobení i-tého řádku číslem $\frac{1}{\lambda}$.

T_1 **je řádková úprava třetího druhu:** Pokud T_1 znamená přičíst λ-násobek j-tého řádku k i-tému řádku, pak za T_2 vezmeme přičtení
$(-\lambda)$ λ-násobku j-tého řádku k i-tému řádku.

Nakonec předpokládejme, že T_1 je tvořena řádkovými úpravami

$$U_1, U_2, \ldots, U_k.$$

Pro každé j nechť U_j' je příslušná inverzní úprava (dle výše rozebraných možností). Pak za T_2 vezmeme transformaci tvořenou řádkovými úpravami

$$U_k', \ldots, U_2', U_1'.$$

To je zcela názorné – pokud po provedení úpravy U_j matici úprava U_j' vrátí do původního stavu, pak k návratu po provedení úprav $U_1, U_2, \ldots, U_k$ je třeba provést úpravy $U_k', \ldots, U_2', U_1'$ (rušit účinky provedených úprav v opačném pořadí – od poslední k první).

- Ilustrace bodu (ii) na příkladu: Pokud T_1 je výše uvedená transformace matic o čtyřech řádcích, pak příslušná transformace T_2, která vyruší účinek T_1 je následující:

  1. Přehodit první a třetí řádek.
  2. K čtvrtému řádku přičíst (-7)-násobek druhého řádku.
  3. K druhému řádku přičíst 2-násobek třetího řádku.
  4. Čtvrtý řádek vynásobit $\frac{1}{3}$.
  5. Přehodit první a třetí řádek.

- Důkaz bodu (iii): Nejprve ukážeme, že $h(\mathbb{B}) \geq h(\mathbb{A})$, tj., že provedení transformace hodnost nezmenší. Protože transformace je několik řádkových úprav za sebou, stačí tuto věc dokázat pro jednotlivé řádkové úpravy.

  Předpokládejme tedy, že $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$. Označme si její řádky postupně $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$. Nechť $h(\mathbb{A}) = k$. Pak můžeme najít lineárně nezávislou k-tici řádků matice $\mathbb{A}$, tj. existují indexy

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m, .$$

že řádky

$$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k} \tag{$\circ$}$$

jsou lineárně nezávislé. Nyní předpokládejme, že $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ pomocí nějaké řádkové úpravy.

- První druh: Pokud $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ prohozením dvou řádků, pak má tytéž řádky, jen v jiném pořadí. Speciálně se mezi jejich řádky vyskytuje lineárně nezávislá k-tice ($\circ$), tedy $h(\mathbb{B}) \geq k$.
- Druhý druh: Předpokládejme, že $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením j-tého řádku nenulovým číslem λ.

  Pokud j není jeden z indexů $i_1, \ldots, i_k$, pak se v matici $\mathbb{B}$ vyskytují řádky ($\circ$). Ty jsou lineárně nezávislé, a tedy $h(\mathbb{B}) \geq k$.

  Druhá možnost je, že j je jeden z indexů $i_1, \ldots, i_k$. Dejme tomu, že $j = i_1$ (ostatní případy jsou analogické). Pak se v matici $\mathbb{B}$ vyskytují řádky

  $$\lambda\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}.$$

  Ukažme, že jsou lineárně nezávislé. Pokud totiž

  $$\alpha_1\lambda\boldsymbol{a}_{i_1} + \alpha_2\boldsymbol{a}_{i_2} + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{a}_{i_k} = \boldsymbol{o},$$

  pak z lineární nezávislosti vektorů ($\circ$) plyne

  $$\alpha_1\lambda = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

  Protože $\lambda \neq 0$, dostaneme

  $$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

  což dokazuje lineární nezávislost vektorů $\lambda\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}$. Tedy i v tomto případě $h(\mathbb{B}) \geq k$.
- Třetí ~~Druhý~~ druh: Předpokládejme, že $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ přičtením λ-násobku p-tého řádku k j-tému řádku, kde $j \neq p$.

  Pokud j není jeden z indexů $i_1, \ldots, i_k$, pak se v matici $\mathbb{B}$ vyskytují řádky ($\circ$). Ty jsou lineárně nezávislé, a tedy $h(\mathbb{B}) \geq k$.

  Druhá možnost je, že j je jeden z indexů $i_1, \ldots, i_k$. Dejme tomu, že $j = i_1$ (ostatní případy jsou analogické). Pak se v matici $\mathbb{B}$ vyskytují řádky

  $$\boldsymbol{a}_{i_1} + \lambda\boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_k}. \tag{$\triangle$}$$

  Nyní rozlišíme dvě možnosti:

* Vektory

$$\boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$$

jsou lineárně nezávislé. Tyto vektory se vyskytují jako řádky v matici $\mathbb{B}$ (připomeňme, že $p \neq i_1$), a tedy $h(\mathbb{B}) \geq k$. *(Mj. z předpokladu plyne, že p není jeden z indexů $i_1, \dots, i_n$.)*

* Vektory

$$\boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$$

jsou lineárně závislé. To znamená, že existují koeficienty $\beta_1, \dots, \beta_k$, ne všechny nulové, splňující

$$\beta_1 \boldsymbol{a}_p + \beta_2 a_{i_2} + \dots + \beta_k \boldsymbol{a}_{i_k} = \boldsymbol{o}.$$

Uvědomme si, že $\beta_1 \neq 0$, protože vektory $\boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé (kdyby totiž $\beta_1 = 0$, měli bychom netriviální lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$, která se rovná nulovému vektoru). Proto můžeme vyjádřit

$$\boldsymbol{a}_p = -\frac{\beta_2}{\beta_1} a_{i_2} - \dots - \frac{\beta_k}{\beta_1} \boldsymbol{a}_{i_k}. \tag{$*$}$$

Dále ukážeme, že odsud plyne lineární nezávislost vektorů ($\triangle$). Mějme totiž jejich lineární kombinaci rovnou nulovému vektoru

$$\alpha_1(\boldsymbol{a}_{i_1} + \lambda \boldsymbol{a}_p) + \alpha_2 \boldsymbol{a}_{i_2} + \dots + \alpha_k \boldsymbol{a}_{i_k} = \boldsymbol{o}.$$

Dosadíme za $\boldsymbol{a}_p$ z ($*$) a upravujme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{o} &= \alpha_1(\boldsymbol{a}_{i_1} + \lambda(-\tfrac{\beta_2}{\beta_1} a_{i_2} - \dots - \tfrac{\beta_k}{\beta_1} \boldsymbol{a}_{i_k})) + \alpha_2 \boldsymbol{a}_{i_2} + \dots + \alpha_k \boldsymbol{a}_{i_k} \\ &= \alpha_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + (\alpha_2 - \tfrac{\alpha_1 \lambda \beta_2}{\beta_1}) \boldsymbol{a}_{i_2} + \dots + (\alpha_k - \tfrac{\alpha_1 \lambda \beta_k}{\beta_1}) \boldsymbol{a}_{i_k}. \end{aligned}$$

Protože $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_k}$ jsou lineárně nezávislé, dostaneme

$$\alpha_1 = \alpha_2 - \tfrac{\alpha_1 \lambda \beta_2}{\beta_1} = \dots = \alpha_k - \tfrac{\alpha_1 \lambda \beta_k}{\beta_1} = 0.$$

Speciálně $\alpha_1 = 0$. Pokud toto dosadíme do dalších koeficientů, dostaneme $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Celkově tedy máme

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$$

což dokazuje lineární nezávislost vektorů ($\triangle$). Tedy $h(\mathbb{B}) \geq k$.

Dokázali jsme tedy následující: Pokud $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ nějakou transformací, pak $h(\mathbb{B}) \geq \mathbb{A}$. Protože podle bodu (ii) víme, že v tomto případě také $\mathbb{A}$ vznikne z $\mathbb{B}$ nějakou transformací, dostaneme i $h(\mathbb{A}) \geq \mathbb{B}$. Celkem tedy máme $h(\mathbb{B}) = \mathbb{A}$, což jsme chtěli dokázat.

Cvičení: Ukažte, že hodnost matice nemůže být větší než počet sloupců. (Návod: Ukažte, že to platí pro schodovitou matici a pak použijte Větu VI.5.)

Sloupcové úpravy a transponovaná matice: *(Zde považuji za důležité prostudovat první tři body a pochopit, co říkají. Další body pak vysvětlují, proč to platí. Jejich prostudování a pochopení je užitečné a doporučuji, ale není nezbytně nutné.)*

- Analogicky jako pro řádkové vektory lze pojem lineární kombinace, lineární závislosti a lineární nezávislosti definovat i pro sloupcové vektory. Pak také můžeme definovat sloupcovou hodnost matice jako největší počet lineárně nezávislých sloupců. Je snadné si uvědomit, že sloupcová hodnost matice $\mathbb{A}$ se rovná $h(\mathbb{A}^T)$.

  Smyslem následujících poznámek a úvah je dokázat, že $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$, neboli že sloupcová hodnost se rovná (řádkové) hodnosti.

- Analogicky jako řádkové úpravy lze definovat sloupcové úpravy (prohození dvou sloupců, vynásobení jednoho sloupce nenulovým číslem, přičtení násobku jednoho sloupce k jinému sloupci) a sloupcovou transformaci (konečná posloupnost sloupcových úprav).

- Pro sloupcovou transformaci platí analogie tvrzení (ii) z Věty VI.5. Důkaz je zcela stejný. Stejně tak platí analogie tvrzení (iii) z téže Věty, tj. sloupcová transformace nemění sloupcovou hodnost matice. Důkaz je opět zcela stejný.

- Je snadné ukázat, že sloupcové úpravy nemění (řádkovou) hodnost matice. Důvod je tento:

  Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ sloupcovou úpravou. Nechť $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ značí řádky matice $\mathbb{A}$ a $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_m$ značí řádky matice $\mathbb{B}$. Zvolme $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ a čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Pak

  $$\alpha_1 \boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a}_{i_k} = \boldsymbol{o} \Leftrightarrow \alpha_1 \boldsymbol{b}_{i_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{b}_{i_k} = \boldsymbol{o}.$$

  Tato ekvivalence je snadná – zkuste si rozmyslet samostatně.

Odsud plyne speciálně, že

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \text{ jsou lineárně závislé } \Leftrightarrow \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \text{ jsou lineárně závislé,}$$

tedy zřejmě $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.

- Sloupcovou transformaci lze též vyjádřit pomocí (řádkové) transformace transponované matice. Podrobněji:

  Mějme nějakou sloupcovou transformaci S matic o n sloupcích. Označme symbolem $\tilde{S}$ analogickou (řádkovou) transformaci matic o n řádcích.

  Mějme dále matici $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a nechť matice $\mathbb{B}$ vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací sloupcové transformace S.

  Pak $\mathbb{B}$ můžeme získat také takto: Uvažme transponovanou matici $\mathbb{A}^T$. Aplikujme na ni transformaci $\tilde{S}$, výslednou matici označme $\mathbb{B}'$. Pak $\mathbb{B} = (\mathbb{B}')^T$.

- Analogicky též (řádkovou) transformaci můžeme vyjádřit pomocí sloupcové transfomace transponované matice.

  Proto transformace nemění hodnost transponované matice (tedy sloupcovou hodnost matice): Mějme matici $\mathbb{A}$ a transformaci S, která ji převede na matici $\mathbb{B}$. Pak analogická sloupcová transformace převede $\mathbb{A}^T$ na $\mathbb{B}^T$, a tedy $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{B}^T)$.

- Nyní můžeme celkem snadno dokázat, že $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}^T)$. Protože $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$, stačí ukázat, že $h(\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}^T)$.

  Mějme tedy matici $\mathbb{A}$. Podle Věty VI.5(i) ji lze nějakou transformací převést na schodovitou matici $\mathbb{S}$. Podle Věty VI.5(iii) máme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{S})$. Podle předchozího bodu víme, že $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{S}^T)$.

  Hodnost matice $\mathbb{S}$ je rovna počtu nenulových řádků, jak bylo vysvětleno v komentáři k první části oddílu VI.2. Pokud použijeme značení z důkazu nerovnosti „$\geq$“, pak lze snadno ukázat, že sloupce s indexy $k_1, \ldots, k_m$ jsou lineárně nezávislé (podobně, jako se dokázala lineární nezávislost prvních m řádků). Proto $h(\mathbb{S}^T) \geq h(\mathbb{S})$.

  Tedy $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{S}^T) \geq h(\mathbb{S}) = h(\mathbb{A})$.

K Větě VI.6:

- Význam této věty spočívá v tom, že dává do souvislosti transformaci a násobení matic. Použijeme ji nejen k důkazu následující věty, ale i k dalším větám v této kapitole a později v Matematice III. Zároveň bude sloužit jako podklad některých početních metod.

- Důkaz: Je zřejmé, že důkaz stačí provést pro případ, že T je tvořena jednou řádkovou úpravou. Označme $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ řádky matice $\mathbb{A}$ a $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m$ řádky matice $\mathbb{C}$. Protože $\mathbb{AB} = \mathbb{C}$, platí

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \boldsymbol{a}_i \mathbb{B} = \boldsymbol{c}_i. \tag{$\diamond$}$$

Dále označme $\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_m$ řádky matice $\mathbb{A}'$ a $\boldsymbol{c}'_1, \ldots, \boldsymbol{c}'_m$ řádky matice $\mathbb{C}'$. K tomu, abychom dokázali, že $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$, stačí ukázat, že

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\} : \boldsymbol{a}'_i \mathbb{B} = \boldsymbol{c}'_i. \tag{$\clubsuit$}$$

To uděláme v závislosti na druhu řádkové úpravy:

První druh: Pokud T je prohození k-tého a l-tého řádku, pak

$$\boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{a}'_l = \boldsymbol{a}_k \text{ a } \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i \text{ pro } i \neq k, l;$$

stejně tak

$$\boldsymbol{c}'_k = \boldsymbol{c}_l, \boldsymbol{c}'_l = \boldsymbol{c}_k \text{ a } \boldsymbol{c}'_i = \boldsymbol{c}_i \text{ pro } i \neq k, l.$$

Proto je jasné, že ($\diamond$) a ($\clubsuit$) říkají totéž.

Druhý druh: Nechť T je vynásobení k-tého řádku číslem λ. Pak

$$\boldsymbol{a}'_k = \lambda \boldsymbol{a}_k \text{ a } \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i \text{ pro } i \neq k;$$

stejně tak

$$\boldsymbol{c}'_k = \lambda \boldsymbol{c}_k \text{ a } \boldsymbol{c}'_i = \boldsymbol{c}_i \text{ pro } i \neq k.$$

Dokažme platnost ($\clubsuit$). Pro $i \neq k$ plyne rovnost přímo z ($\diamond$), pro $i = k$ plyne z výpočtu

$$\boldsymbol{a}'_k \mathbb{B} = \lambda \boldsymbol{a}_k \mathbb{B} = \lambda \boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{c}'_k.$$

Třetí druh: Nechť T je přičtení λ-násobku l-tého řádku ke k-tému řádku. Pak

$$\boldsymbol{a}'_k = \boldsymbol{a}_k + \lambda \boldsymbol{a}_l \text{ a } \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}_i \text{ pro } i \neq k;$$

stejně tak

$$\boldsymbol{c}'_k = \boldsymbol{c}_k + \lambda \boldsymbol{c}_l \text{ a } \boldsymbol{c}'_i = \boldsymbol{c}_i \text{ pro } i \neq k.$$

Dokažme platnost (♣). Pro $i \neq k$ plyne rovnost přímo z ($\diamond$), pro $i = k$ plyne z výpočtu

$$\boldsymbol{a}'_k \mathbb{B} = (\boldsymbol{a}_k + \lambda \boldsymbol{a}_l)\mathbb{B} = \boldsymbol{a}_k \mathbb{B} + \lambda \boldsymbol{a}_l \mathbb{B} = \boldsymbol{c}_k + \lambda \boldsymbol{c}_l = \boldsymbol{c}'_k.$$

Cvičení:

1. *Nechť $\mathbb{AB} = \mathbb{C}$. Nechť matice $\mathbb{B}'$ vznikne z matice $\mathbb{B}$ aplikací sloupcové transformace S. Označme $\mathbb{C}'$ matici, která vznikne z $\mathbb{C}$ aplikací téže sloupcové transformace S. Ukažte, že $\mathbb{AB}' = \mathbb{C}'$.*

   (Návod: Buď použijte stejnou metodu důkazu jako ve Větě VI.6, nebo odvoďte z Věty VI.6 pomocí Věty VI.3.)

2. *Nechť T je nějaká transformace matic o m řádcích. Označme $\mathbb{B}$ matici, která vznikne aplikací transformace T na jednotkovou matici řádu m.*

   Ukažte, že pro každou matici $\mathbb{A}$ o m řádcích je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací transformace T, je rovna $\mathbb{BA}$.

3. *Nechť S je nějaká sloupcová transformace matic o n sloupcích. Označme $\mathbb{B}$ matici, která vznikne aplikací sloupcové transformace S na jednotkovou matici řádu n.*

   Ukažte, že pro každou matici $\mathbb{A}$ o n sloupcích je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ aplikací sloupcové transformace S, je rovna $\mathbb{AB}$.

K Větě VI.7:

- Důkaz implikace $\Rightarrow$: Předpokládejme, že $\mathbb{A}$ je regulární. Nechť $\mathbb{A}^{-1}$ je inverzní matice. Ta splňuje

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$$

Podle Věty VI.5(i) existuje transformace T, která matici $\mathbb{A}$ převede na schodovitou matici $\mathbb{S}$.

Označme $\mathbb{B}$ matici, která vznikne z $\mathbb{I}$ aplikací téže transformace T. Podle Věty VI.6 platí

$$\mathbb{S}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{B}.$$

Podle Věty VI.4(iii) platí $h(\mathbb{B}) = h(\mathbb{I})$. Protože $h(\mathbb{I}) = n$ (je zřejmé, že její řádky jsou lineárně nezávislé; též je možné použít fakt, že je to schodovitá matice a všechny řádky jsou nenulové), platí $h(\mathbb{B}) = n$. Proto jsou řádky matice $\mathbb{B}$ lineárně nezávislé, speciálně, žádný řádek není nulový. Protože

$$(j\text{-tý řádek matice } \mathbb{B}) = (j\text{-tý řádek matice } \mathbb{S}) \cdot \mathbb{A}^{-1},$$

vidíme, že žádný řádek matice $\mathbb{S}$ není nulový. Protože $\mathbb{S}$ je schodovitá, znamená to $h(\mathbb{S}) = n$.

Nakonec z Věty VI.5(iii) dostaneme $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{S}) = n$.

- Důkaz implikace $\Leftarrow$: Nechť $h(\mathbb{A}) = n$. Ukážeme, že $\mathbb{A}$ je regulární. Uděláme to ve dvou krocích.

Krok 1: Ukážeme, že $\mathbb{A}$ lze nějakou transformací převést na jednotkovou matici.

Podle Věty VI.5(i) existuje nějaké transformace T_1, která $\mathbb{A}$ převede na schodovitou matici $\mathbb{S}$.

Podle Věty VI.5(iii) platí $h(\mathbb{S}) = h(\mathbb{A}) = n$, tedy všechny řádky matice $\mathbb{S}$ jsou nenulové.

Protože $\mathbb{S}$ je schodovitá, má n řádků i n sloupců a všechny řádky jsou nenulové, jediná možnost je, že počet nul na začátku řádků je postupně

$$0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

To znamená, že $\mathbb{S}$ je horní trojúhelníková matice, která má na diagonále nenulové prvky. Tedy

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \ldots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & s_{23} & \ldots & s_{2n} \\ 0 & 0 & s_{33} & \ldots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

kde čísla $s_{11}, s_{22}, \dots, s_{nn}$ jsou nenulová. Nyní prodeveme postupně n úprav druhého druhu – první řádek vynásobíme $\frac{1}{s_{11}}$, druhý vynásobíme $\frac{1}{s_{22}}$, a tak dále, až n-tý vynásobíme $\frac{1}{s_{nn}}$. Tím dostaneme matici

$$\mathbb{S}' = \begin{pmatrix} 1 & s'_{12} & s'_{13} & \dots & s'_{1n} \\ 0 & 1 & s'_{23} & \dots & s'_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & s'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní už snadno matici převedeme na jednotkovou pomocí úprav třetího druhu:

Nejprve ošetříme poslední sloupec: K prvnímu řádku přičteme $(-s'_{1n})$-násobek n-tého, k druhému přičteme $(-s'_{2n})$-násobek n-tého, a tak dále, až k $(n-1)$-tému řádku přičteme $(-s'_{n-1,n})$-násobek n-tého. Tím dostaneme matici

$$\mathbb{S}'' = \begin{pmatrix} 1 & s'_{12} & s'_{13} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & s'_{23} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky postupujeme pro $(n-1)$-tý sloupec, a tak dále, až pro druhý sloupec. Nakonec získáme jednotkovou matici.

Krok 2: Dle Kroku 1 víme, že existuje transformace T, která $\mathbb{A}$ převede na jednotkovou matici.

Aplikujme tutéž transformaci T na jednotkovou matici $\mathbb{I}$ a výslednou matici označme $\mathbb{B}$.

Protože $\mathbb{IA} = \mathbb{A}$, Věta VI.6 nám dá rovnost $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$.

Tím jsme vlastně hotovi, protože pak platí i $\mathbb{AB} = \mathbb{I}$, tedy $\mathbb{B}$ je inverzní matice k $\mathbb{A}$, a proto $\mathbb{A}$ je regulární.

Argument předchozího odstavce plyne buď z poznámky zmíněné u definice regulární a inverzní matice (která bude dokázána v oddílu VI.5), nebo lze postupovat následovně: *Víme, že existuje $\mathbb{B}$, že $\mathbb{BA} = \mathbb{I}$. Protože $h(\mathbb{A}^T) = h(\mathbb{A}) = n$, plyne z předchozího existence matice $\mathbb{C}$, pro kterou $\mathbb{CA}^T = \mathbb{I}$, tedy*

$$\mathbb{AC}^T = (\mathbb{CA}^T) = \mathbb{I}^T = \mathbb{I}.$$

Pak ovšem

$$\mathbb{C}^T = \mathbb{I}\mathbb{C}^T = (\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{C}^T = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{C}^T) = \mathbb{B}\mathbb{I} = \mathbb{B}.$$

Tedy $\mathbb{C}^T = \mathbb{B}$*, tudíž* $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$*, a proto* $\mathbb{B}$ *je inverzní k* $\mathbb{A}$*.*

Závěrečné poznámky: Věty VI.5 a VI.7 nejen obsahují příslušná tvrzení, ale jejich důkazy dávají návod k řešení konkrétních příkladů. Tak důkaz bodu (i) Věty VI.1 dává návod, jak matici převést na schodovitou (a tím určit hodnost). Důkaz druhé implikace Věty VI.7 zase dává návod, jak najít inverzní matici. Více o tom později u řešených příkladů.