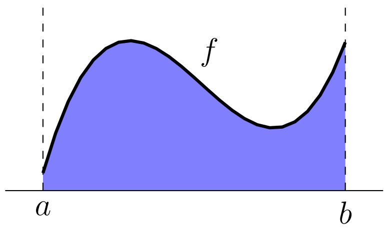
**K oddílu VIII.1 – Riemannův integrál, motivace a definice**

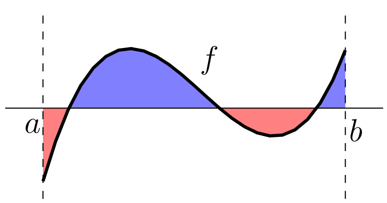
**Motivace k definici**

- Mějme nějakou reálnou funkci $f$ definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Naším cílem je nějak definovat, co to je obsah plochy mezi grafem $f$ a osou $x$.

  Ilustruje to tento obrázek – chceme definovat, co to je obsah modré plochy.

  Abychom to ještě upřesnili – může se stát, že část grafu je nad osou $x$ a část je pod osou $x$. Pak tu plochu nad osou $x$ chceme počítat s kladným znaménkem, a část plochy pod osou $x$ se záporným znaménkem. Ilustruje to následující obrázek.

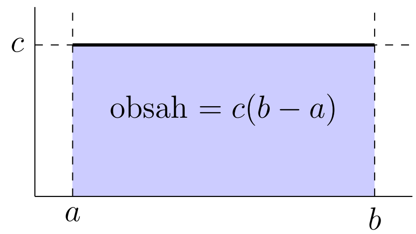
  Naším cílem je definovat, co je to obsah modré plochy minus obsah červené plochy.

- Proč nás to zajímá: Důvodů je celá řada, tato otázka je důležitá jak z vnitřního matematického hlediska, tak z důvodů použití v řadě dalších oborů, mj. ve fyzice, meteorologii či ekonomii.

  Je to [mimo jiné] jeden ze způsobů, jak definovat průměrnou hodnotu nějaké veličiny za určitý časový interval.

  Pokud totiž $f(t)$ značí hodnotu oné veličiny (rychlost auta, teplota vzduchu, cena ropy) v čase $t$, pak průměrnou hodnotu za časový interval od $a$ do $b$ určíme tak, že spočteme výše zmíněný obsah plochy a vydělíme jej $b - a$, tj. délkou příslušného časového intervalu.

- Jak obsah spočítat? Vyjdeme z toho nejjednoduššího případu – obsah obdélníku je roven součinu jeho šířky a výšky:

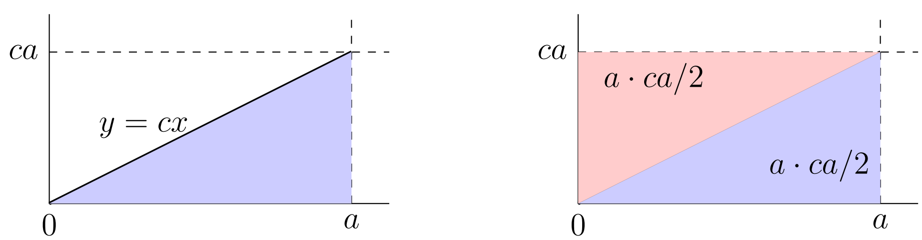
  Máme-li konstantní funkci, která se na intervalu $\langle a, b\rangle$ rovná číslu $c$, pak plocha pod grafem je obdélník, jehož obsah je $c(b-a)$ (pokud $c < 0$, dává tento vzorec „minus obsah“, v souladu s tím, co jsme říkali výše).

  Zároveň je průměrná hodnota funkce $f$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ rovna $c$, což je v souladu s intuicí a zároveň je to rovno

$$\frac{\text{obsah}}{\text{délka intervalu}} = \frac{c(b-a)}{b-a}.$$

- Ještě jeden příklad – obsah trojúhelníka.

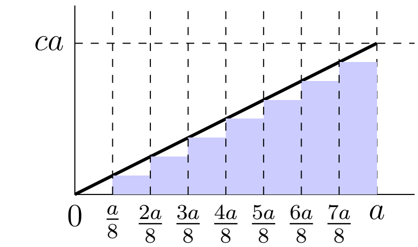
  Mějme funkci $f(x) = cx$, kde $c > 0$ je nějaké pevné číslo a podívejme se na plochu pod grafem na intervalu $\langle 0, a\rangle$, kde $a > 0$.

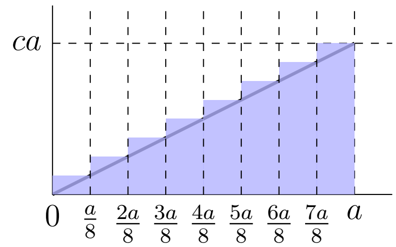
  Zmíněná plocha je modrý trojúhelník vyznačený na obrázku vlevo. Spočítat obsah trojúhelníku umíme, protože to je polovina obsahu obdélníku, jak je vyznačeno na obrázku vpravo.

  Tento postup je však specifický pro trojúhelník a nelze ho snadno zobecnit pro složitější plochy.

  Ukážeme si jiný postup, pomocí aproximace plochy soubory obdélníků. To ilustrují následující obrázky:




**aproximace obdélníky zdola**

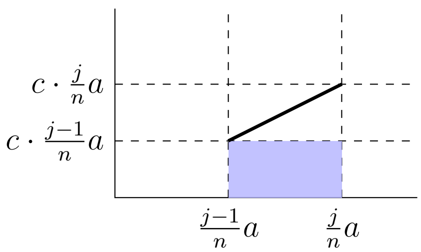



**aproximace obdélníky shora**

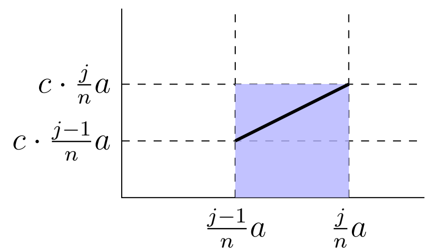
Interval $\langle 0, a\rangle$ rozdělíme na $n$ stejně velkých dílů (na obrázku je $n = 8$).

Na každém z malých intervalů aproximujeme obsah pod grafem zdola a shora pomocí obdélníku. Tedy vezmeme „největší obdélník, který se vejde pod graf" (vlevo) a „nejmenší obdélník, který obsahuje plochu pod grafem" (vpravo). Tyto obsahy pak sečteme přes všechny malé intervaly.

Spočtěme to nyní přesně: Zvolme $j \in \{1, \ldots, n\}$ a podívejme se na interval $\langle \frac{j-1}{n}a, \frac{j}{n}a\rangle$ (tj. $j$-tý interval zleva). Detail obrázku je zde:




**vnitřní obdélník**




**vnější obdélník**

Největší obdélník, který se vejde pod graf na intervalu $\langle \frac{j-1}{n}a, \frac{j}{n}a\rangle$ (vnitřní obdélník na předchozím obrázku) má výšku $c \cdot \frac{j-1}{n}a$ (což je nejmenší hodnota funkce na tomto intervalu). Protože šířka obdélníku je $\frac{a}{n}$, jeho obsah je roven

$$\frac{a}{n} \cdot c \cdot \frac{j-1}{n}a.$$

Pokud sečteme obsahy všech $n$ těchto vnitřních obdélníků, dostaneme

$$D_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot c \cdot \frac{j-1}{n}a = \frac{a^2c}{n^2} \sum_{j=1}^{n} (j-1) = \frac{a^2c}{n^2} \cdot \frac{1}{2}(n-1)n = \frac{(n-1)a^2c}{2n}.$$

Dále, nejmenší obdélník, který obsahuje plochu pod grafem na intervalu $\langle \frac{j-1}{n}a, \frac{j}{n}a\rangle$ (vnější obdélník na obrázku výše) má výšku $c \cdot \frac{j}{n}a$ (což je nejmenší hodnota funkce na tomto intervalu). Protože šířka obdélníku je opět $\frac{a}{n}$, jeho obsah je roven

$$\frac{a}{n} \cdot c \cdot \frac{j}{n} a.$$

Pokud sečteme obsahy všech $n$ těchto vnějších obdélníků, dostaneme

$$H_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot c \cdot \frac{j}{n} a = \frac{a^2 c}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{a^2 c}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{(n+1)a^2 c}{2n}.$$

Spočítali jsme tedy jednak $D_n$, součet obsahů vnitřních obdélníků, který by měl obsah plochy pod grafem aproximovat zdola, a $H_n$, součet obsahů vnějších obdélníků, který by měl obsah plochy pod grafem aproximovat shora. Máme tedy

$$\begin{array}{ccccc} D_n & \leq & \text{obsah plochy pod grafem} & \leq & H_n \\ \| & & & & \| \\ \frac{(n-1)a^2 c}{2n} & & & & \frac{(n+1)a^2 c}{2n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \frac{1}{2} a^2 c & & & & \frac{1}{2} a^2 c \end{array}$$

Protože odhad zdola i shora má pro $n \to \infty$ stejnou limitu, a to $\frac{1}{2} a^2 c$, zdá se přirozené, aby tato hodnota byla prohlášena za obsah plochy pod grafem.

Všimněme si, že výsledek je v souladu se známým vzorcem pro obsah trojúhelníku. To znamená, že tento postup může dávat smysl a je rozumné ho použít i pro další funkce. To je přesně to, co nyní uděláme.

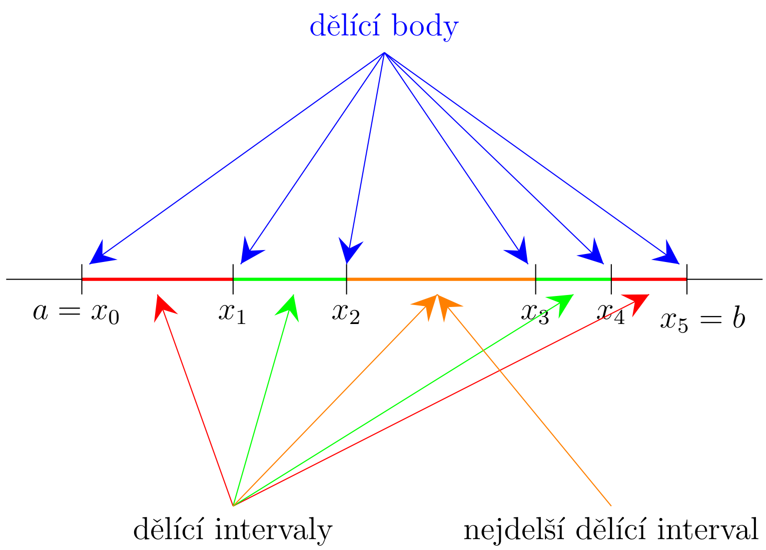
**K pojmu dělení intervalu:**

- Smyslem pojmu dělení intervalu je přesně vyjádřit skutečnost, že interval rozdělíme na několik menších intervalů.

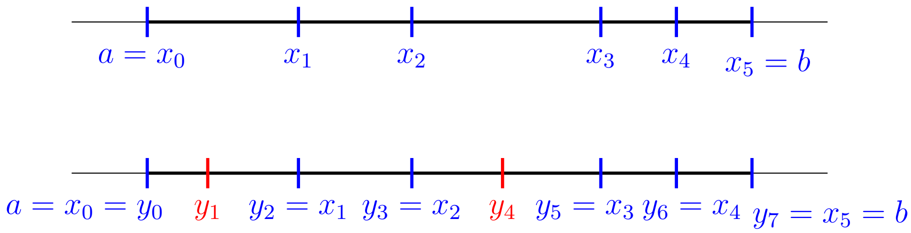
  V motivačním příkladu jsme dělili interval na stejně dlouhé menší intervaly. To ale není podmínka, jednotlivé intervaly mohou být různě dlouhé.

  Ilustrujme to na obrázku. Je na něm znázorněno dělení intervalu na pět menších intervalů. Máme tedy šest dělících bodů (krajní body intervalu a čtyři další body) a pět dělících intervalů.

  Norma dělení je rovna délce nejdelšího z dělících intevalů, v našem případě je to tedy délka prostředního (oranžového) intervalu.



- Ilustrujme si pojem zjemnění dělení. Na horním obrázku je znázorněno dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na pět menších intervalů. Na dolním obrázku je jeho zjemnění, které vznikne přidáním dvou dělících bodů (vyznačených červeně). Je to tedy dělení na sedm intervalů.

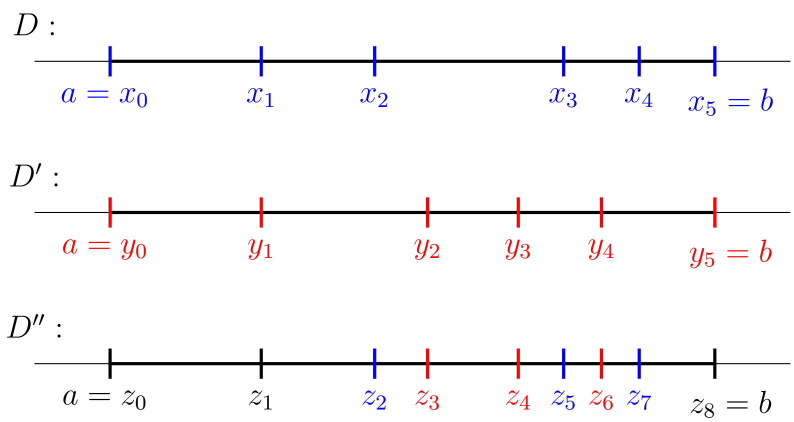



- (Větička VIII.1(1)) Nechť $D$ a $D'$ jsou dvě dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak existuje dělení $D''$, které je jejich společným zjemněním (tj. je zjemněním $D$ i zjemněním $D'$).

  Toto tvrzení je triviální. Stačí vzít dělící body $D$, dělící body $D'$, sjednotit tyto dvě skupiny a uspořádat dle velikosti.

  Ilustrujeme to opět na obrázku. Máme dělení $D$ a $D'$, každé z nich interval $\langle a, b\rangle$ rozdělí na pět menších intervalů.

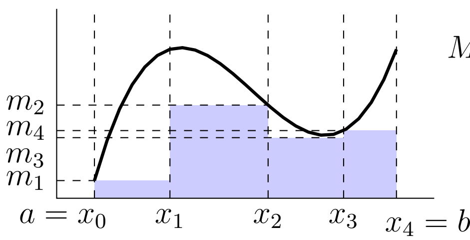
  Dáme-li dohromady dělící body obou dělení, dostaneme dělení $D''$, které interval $\langle a, b\rangle$ rozdělí na osm intervalů. (Černou barvou jsou znázorněny dělící body, které patří do obou dělení $D$ a $D'$.)



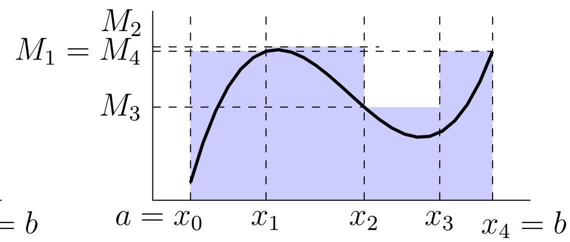
**K definici a vlastnostem horních a dolních součtů:**

- Horní a dolní součet byly ty aproximace obsahu plochy pod grafem shora a zdola, které jsme počítali v motivačním příkladu výše.

  Ilustrujme to opět na obrázku:




**dolní součet**




**horní součet**

  Definice je v souladu s intuicí:

$$m_i = \inf f(\langle x_{j-1}, x_j \rangle)$$

  je výška největšího obdélníku, který se vejde pod graf $f$ na intervalu $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$. Aby se tam obdélník vešel, jeho výška musí být dolní závora $f$ na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$; infimum je největší horní závora.

  Obsah onoho největšího obdélníku je pak $m_i(x_i - x_{i-1})$.

  Podobně

$$M_i = \sup f(\langle x_{j-1}, x_j \rangle)$$

  je výška nejmenšího obdélníku, který obsahuje plochu pod grafem $f$ na intervalu $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$. Aby ji obdélník obsahoval, jeho výška musí být horní závora $f$ na $\langle x_{j-1}, x_j \rangle$; supremum je nejmenší horní závora.

  Obsah onoho nejmenšího obdélníku je pak $M_i(x_i - x_{i-1})$.

- Protože pro každé $i$ platí $m_i \leq M_i$, je zřejmé, že

$$\underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D),$$

  neboli dolní součet je menší nebo roven hornímu součtu.

- (Větička VIII.1(2)) Pokud $D'$ je zjemněním $D$, pak

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D').$$

Prostřední nerovnost je triviální, jak jsme vysvětlili v předchozím bodě.

Zbývá dokázat první a třetí nerovnost. Tedy, že při přechodu ke zjemnění dolní součet se buď zvětší nebo zůstane stejný a horní součet se buď zmenší nebo zůstane stejný.

Připomeňme, že $D'$ je zjemněním $D$, pokud obsahuje stejné dělící body a případně ještě nějaké další.

Stačí si tedy rozmyslet, že nerovnosti platí, pokud $D'$ vznikne z $D$ přidáním jednoho bodu.

Mějme tedy dělení

$$D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

a dělení $D'$ nechť obsahuje navíc bod $z$. Tento bod patří do jednoho z dělících intervalů dělení $D$. Tedy existuje nějaké $j \in \{1, \ldots, n\}$, že $x_{j-1} < z < x_j$.

Pro jednodušší zápis předpokládejme, že $j = n$, tedy bod $z$ rozdělí na dva poslední interval dělení $D$.

Dělící intervaly dělené $D'$ jsou pak tvořeny jednak prvními $(n-1)$ dělícími intervaly dělení $D$ a dále dvojicí intervalů $\langle x_{n-1}, z\rangle$, $\langle z, x_n\rangle$, na které byl rozdělen $n$-tý interval dělení $D$.

Když počítáme dolní součet, pro dělení $D$ a $D'$ pak prvních $n-1$ sčítanců je pro obě dělení stejných. Je tedy třeba porovnat poslední sčítanec pro dělení $D$, tj.

$$(x_n - x_{n-1}) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle)$$

se součtem posledních dvou sčítanců pro dělení $D'$, tj.

$$(z - x_{n-1}) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, z\rangle) + (x_n - z) \cdot \inf f(\langle z, x_n\rangle).$$

Protože $\langle x_{n-1}, z\rangle \subset \langle x_{n-1}, x_n\rangle$ i $\langle z, x_{n-1}\rangle \subset \langle x_{n-1}, x_n\rangle$, dostáváme

$$\begin{aligned}
&(z - x_{n-1}) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, z\rangle) + (x_n - z) \cdot \inf f(\langle z, x_n\rangle) \\
&\qquad \geq (z - x_{n-1}) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle) + (x_n - z) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle) \\
&\qquad\qquad = (x_n - x_{n-1}) \cdot \inf f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle)
\end{aligned}$$

Tedy

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D')$$

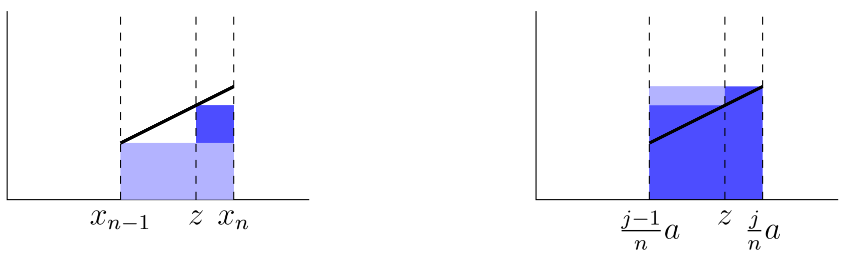
Pro horní součty postupujeme obdobně:

$$\begin{aligned}
(z - x_{n-1}) \cdot \sup f(\langle x_{n-1}, z\rangle) + (x_n - z) \cdot \sup f(\langle z, x_n\rangle)& \\
\leq (z - x_{n-1}) \cdot \sup f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle) + (x_n - z) \cdot \sup f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle)& \\
= (x_n - x_{n-1}) \cdot \sup f(\langle x_{n-1}, x_n\rangle)&
\end{aligned}$$

Tedy

$$\overline{S}(f, D) \geq \overline{S}(f, D')$$

Ilustrací uvedených nerovností je následující obrázek:




Na levém obrázku tmavý obdélník ukazuje, o co se zvětší dolní součet při přidání dělícího body $z$.

Na pravém obrázku světlý obdélník ukazuje, o co se zmenší horní součet při přidání dělícího body $z$.

- (Větička VIII.1(3)): Pokud $D_1$ a $D_2$ jsou dvě dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2).$$

Tedy, libovolný dolní součet je menší nebo roven libovolnému hornímu součtu.

Důkaz plyne kombinací již dokázaných bodů (1) a (2):

Podle (1) existuje dělení $D$, které je společným zjemněním $D_1$ a $D_2$.

Podle (2) pak platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_2),$$

což je to, co jsme chtěli.

**Definice Riemannova integrálu**

- Pokud $S$ je omezená funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, má smysl definovat horní a dolní součty pro každé dělení.
- Dolní součty by měly obsah plochy pod grafem aproximovat zdola. Tedy, pokud obsah plochy má mít nějaký smysl, musí platit

  $$\text{obsah } \geq \sup\{\underline{S}(f, D); D \text{ je dělení } \langle a, b\rangle\}.$$

  Výraz vpravo je přesně dolní Riemannův integrál, tj. $\underline{\int_a^b} f$.
- Horní součty by měly obsah plochy pod grafem aproximovat shora. Tedy, pokud obsah plochy má mít nějaký smysl, musí platit

  $$\text{obsah } \leq \inf\{\overline{S}(f, D); D \text{ je dělení } \langle a, b\rangle\}.$$

  Výraz vpravo je přesně horní Riemannův integrál, tj. $\overline{\int_a^b} f$.
- (Větička VIII.1(4)): $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$, tj. dolní integrál je menší nebo roven hornímu:

  Toto plyne z již dokázaného bodu (3) a z definice:

  Podle (3) je každý horní součet $\overline{S}(f, D)$ horní závorou množiny všech dolních součtů.

  Protože dolní integrál $\underline{\int_a^b} f$ je supremem dolních součtů, tedy nejmenší horní závorou, je $\overline{S}(f, D) \geq \underline{\int_a^b}$ (pro každé dělení $D$).

  Tedy dolní integrál je dolní závorou množiny všech horních součtů.

  Protože infimum (největší dolní závora) množiny horních součtů je horní integrál, je horní integrál větší nebo roven dolnímu integrálu.

- Může se stát, že $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$:

  Nechť $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Uvažme tuto funkci na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
  Nechť

  $$D : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

  je nějaké dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $m_i = 0$ a $M_i = 1$ (každý interval obsahuje racionální i iracionální čísla). Tedy

  $$\underline{S}(f, D) = 0 \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, D) = 1.$$

  Protože to platí pro každé dělení, je

  $$\underline{\int_0^1} f = 0 \quad \text{a} \quad < \overline{\int_0^1} f = 1.$$

- Pokud ovšem vyjde $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, pak za obsah plochy pod grafem prohlásíme tuto společnou hodnotu.

  Značí se pak $\int_a^b f$ a nazývá Riemannovým integrálem funkce $f$ od $a$ do $b$ (přes interval $\langle a, b \rangle$).

- Riemannův integrál může a nemusí existovat. Existuje například pro konstantní funkci a neexistuje například pro výše uvedenou funkci (nazývanou Dirichletova funkce).

- Riemannův integrál není jedinou možností, jak počítat obsah plochy pod grafem. Později (v Matematice III) si ukážeme některé obecnější možnosti.