K oddílu VIII.2 – Riemannův integrál pro spojité funkce, první část – existence integrálu

Poznámky k účelu tohoto oddílu:

- V oddílu VIII.1 jsme si definovali Riemannův integrál, a to postupem v jistém smyslu intuitivním.

  Poté jsme zformulovali a dokázali několik základních vlastností a početních metod pro Riemannův integrál.

  Ale dosud nevíme, pro jaké funkce Riemannův integrál existuje. Máme sice Větičku VIII.2, ale její použitelnost pro konkrétní funkce je velmi omezená.

  Také nám chybí efektivní metoda výpočtu Riemannova integrálu. Definice přes dělení a dolní a horní součty je sice přirozená a názorná, ale k praktickým výpočtům se nehodí.

  Tyto dvě mezery zaplní oddíl VIII.2.

- Prvním důležitým výsledkem je Věta VIII.5, která říká, že funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$ má Riemannův integrál.

  To znamená, že námi zavedený pojem integrálu (obsahu plochy pod grafem) má smysl pro dosti velkou a přirozenou třídu funkcí.

- Druhým klíčovým výsledkem je Věta VIII.9, která dává vzorec pro výpočet integrálu použitelný v praktických výpočtech.

K definici stejnoměrné spojitosti:

- Proč se tím zabýváme: Věta VIII.4 bude použita podstatným způsobem k důkazu Věty VIII.5. Navíc se bude hodit i později.

- Připomeňme, co znamená spojitost na intervalu. Mějme interval I a funkci $f : I \to \mathbb{R}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
&f \text{ je spojitá na intervalu } I \iff \forall x \in I : f \text{ je spojitá v bodě } x \text{ vzhledem k } I\\
&\iff \forall x \in I : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in B(x,\delta) \cap I : f(y) \in B(f(x), \varepsilon)\\
&\iff \forall x \in I : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\\
&\iff \cancel{\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in I\, \exists \delta > 0}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall x \in I\, \exists \delta > 0\, \forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Vysvětleme si tyto ekvivalence:

První ekvivalence plyne z definice spojitosti na množině (z oddílu V.3) a z toho, že spojitost na intervalu I podle oddílu IV.4 je totéž, co spojitost na množině I podle oddílu V.3, jak jsme si vysvětlili při probírání oddílu V.3.

Druhá ekvivalence plyne z definice spojitosti v bodě vzhledem k množině.

Třetí ekvivalence plyne z toho, že $y \in B(x, \delta)$ znamená $|y - x| < \delta$ a $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ znamená $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Čtvrtá ekvivalence: Rozdíl mezi oběma tvrzeními je v pořadí prvních dvou kvantifikátorů. Jednou tam je $\forall x \in I \, \forall \varepsilon > 0$ a jednou $\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in I$. To ovšem není rozdíl, protože obojí znamená „pro každou dvojici x, ε, kde $x \in I$ a $\varepsilon > 0$“. Přitom nezáleží na tom, zda je nejdříve zadáno x a pak ε nebo obráceně.

- Máme tedy, že f je spojitá na intervalu I, právě když platí

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall x \in I \, \exists \delta > 0 \, \forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Tedy, vyjádřeno částečně slovně, ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in I$ najdeme číslo $\delta > 0$, že

$$\forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ono $\delta > 0$ volíme v závislosti na ε a x.

Stejnoměrná spojitost je důležitý speciální případ, kdy δ lze volit v závislosti pouze na ε, nezávisle na δ. To je vyjádřeno přehozením dvou kvantifikátorů – první řádek vyjadřuje spojitost f na intervalu I a druhý řádek vyjadřuje stejnoměrnou spojitost f na I.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\forall x \in I} \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\exists \delta > 0} \quad \boxed{\forall x \in I} \quad \forall y \in I : |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

- Z uvedeného vysvětlení je zřejmé, že stejnoměrná spojitost je silnější verze spojitosti, tj., že každá funkce stejnoměrně spojitá na intervalu I je také spojitá na I.

- Příklad 1: Funkce $f(x) = x$ je stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

  Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné.

  Zvolme $\delta = \varepsilon$.

  Pokud $x, y \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $|x - y| < \delta$, pak

  $$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta = \varepsilon.$$

- Příklad 2: Funkce $f(x) = x^2$ je spojitá na $\mathbb{R}$, ale není stejnoměrně spojitá na $\mathbb{R}$.

  To, že f je spojitá na $\mathbb{R}$, víme již z kapitoly IV.

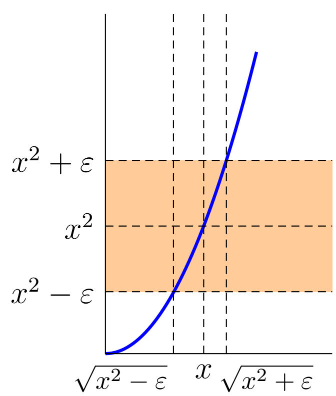
  Ukážeme, že f není stejnoměrně spojitá.

  Zvolme $\varepsilon > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.

  Protože f je spojitá, existuje $\delta > 0$, že pro $y \in B(x, \delta)$ platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

  Rozmysleme si, že takové δ musí záviset na x:

  Předpokládejme, že a $\varepsilon < 1$ a $x > 1$. Následující obrázek ukazuje, jak je třeba zvolit δ:

  δ je třeba zvolit tak, aby $B(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta) \subset (\sqrt{x^2 - \varepsilon}, \sqrt{x^2 + \varepsilon})$.

  Speciálně musí platit $\delta \leq \sqrt{x^2 + \varepsilon} - x$.

  Protože $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + \varepsilon} - x) = 0$, vidíme, že δ nelze zvolit nezávislé na x.

K Větě VIII.4

- Tato věta říká, že funkce spojitá na omezeném uzavřeném intervalu je automaticky stejnoměrně spojitá.

  Pro neomezené intervaly to neplatí (příklad je výše).

  Pro neuzavřené intervaly to také neplatí. Například $f(x) = \frac{1}{x}$ nebo $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ jsou spojité na intervalu $(0, 1\rangle$, ale nejsou stejnoměrně spojité.

- Důkaz:

  Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale ne stejnoměrně spojitá.

  To znamená, že platí

  $$\exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists x \in \langle a, b\rangle\,\exists y \in \langle a, b\rangle : |x - y| < \delta \& |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

  Zvolme tedy $\varepsilon > 0$ takové, že platí

  $$\forall\delta > 0\,\exists x \in \langle a, b\rangle\,\exists y \in \langle a, b\rangle : |x - y| < \delta \& |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

  To znamená, že pro každé kladné číslo $\delta > 0$ existuje dvojice bodů $x, y \in \langle a, b\rangle$, pro kterou platí $|x - y| < \delta$ a zároveň $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

  Aplikujme tento postup pro $\delta = \frac{1}{n}$ pro každé přirozené číslo n.

  Protože $\frac{1}{n} > 0$, existuje dvojice bodů $x_n, y_n \in \langle a, b\rangle$, pro kterou platí

  $$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{a} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{$*$}$$

  Máme tedy dvě posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ prvků $\langle a, b\rangle$.

  Protože posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$, která konverguje k nějakému $x \in \mathbb{R}$.

  Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $a \leq x_{n_k} \leq b$, podle věty o limitě a uspořádání platí $a \leq x \leq b$, neboli $x \in \langle a, b\rangle$.

  Z první nerovnosti v $(*)$ plyne, že $x_n - y_n \to 0$, tedy i $x_{n_k} - y_{n_k} \to 0$ (limita vybrané posloupnosti).

Proto

$$y_{n_k} = \underbrace{x_{n_k}}_{\to x} + \underbrace{y_{n_k} - x_{n_k}}_{\to 0} \to x.$$

Máme tedy $x_{n_k} \to x$ a $y_{n_k} \to x$. Podle Heineho věty pro spojitost na intervalu platí

$$f(x_{n_k}) \to f(x) \quad \text{a} \quad f(y_{n_k}) \to f(x),$$

tedy

$$f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0, \text{ neboli } |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to 0.$$

To je ovšem ve sporu s druhou nerovností v $(**)$ (díky větě o limitě a uspořádání).

K Větě VIII.5

- Nechť f je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Dokážeme nejprve následující pomocné tvrzení:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall D \text{ dělení intervalu } \langle a, b\rangle : \\ &\qquad\qquad \nu(D) < \delta \Rightarrow \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{$\circ$}$$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$.

Položme $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Pak také $\varepsilon' > 0$.

Podle Věty VIII.4 víme, že f je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$.

Nechť $\delta > 0$ přísluší podle definice stejnoměrné spojitosti číslu ε'. Neboli je takové, že platí

$$\forall x, y \in \langle a, b\rangle : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon'. \tag{$\circ\circ$}$$

Ukažme, že toto δ dokazuje tvrzení $(\circ)$:

Nechť

$$D : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ splňující $\nu(D) < \delta$.

Připomeňme, že z definice horních a dolních součtů plyne, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{$\heartsuit$}$$

kde

$$M_i = \sup f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \quad \text{a} \quad m_i = \inf f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle).$$

Protože f je spojitá, máme dokonce

$$M_i = \max f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle) \quad \text{a} \quad m_i = \min f(\langle x_{i-1}, x_i\rangle),$$

tedy speciálně

$$M_i = f(u_i) \text{ a } m_i = f(v_i) \text{ pro nějaká } u_i, v_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle.$$

Protože

$$|u_i - v_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq \nu(D) < \delta,$$

z ($\circ\circ$) plyne

$$M_i - m_i = f(u_i) - f(v_i) < \varepsilon'.$$

Proto z ($\heartsuit$) dostaneme

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon'(x_i - x_{i-1}) \\ &= \varepsilon' \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon'(b-a) = \varepsilon \end{aligned}.$$

Tím je pomocné tvrzení ($\circ$) dokázané.

- Z pomocného tvrzení ($\circ$) pak tvrzení věty plyne již snadno pomocí Větičky VIII.2(ii).

  Důvod je ten, že pro každé $\delta > 0$ lze zvolit dělení D splňující $\nu(D) < \delta$.

  Například můžeme vzít dělení D_n na n stejně dlouhých intervalů. Pak $\nu(D) = \frac{b-a}{n}$, což může být libovolně malé.

K Lemmatu VI:

- Důkaz:

  Důkaz snadno plyne z pomocného tvrzení ($\circ$) dokázaného výše.

  Nechť D_n je posloupnost dělení splňující $\nu(D_n) \to 0$.

  Pak platí $\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \to 0$.

[Důkaz z definice limity a ($\circ$): Nechť $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta > 0$ přísluší ε podle ($\circ$). Protože $\nu(D_n) \to 0$, existuje n_0, že pro $n \geq n_0$ je $\nu(D_n) < \delta$. Podle volby δ pak ovšem pro $n \geq n_0$ platí $\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) < \varepsilon$, což dokončuje důkaz.]

Již víme, že $\int_a^b f$ existuje. Přitom zřejmě

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \int_a^b f \leq \overline{S}(f, D_n),$$

tedy

$$\left| \int_a^b f - \underline{S}(f, D_n) \right| \leq \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \to 0,$$
$$\left| \int_a^b f - \overline{S}(f, D_n) \right| \leq \overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) \to 0,$$

což dokončuje důkaz.