Doplňující cvičení k oddílům VIII.1 a VIII.2

Poznámka: První čtyři cvičení jsou zaměřeny na pochopení definice Riemannova integrálu a Větičky VIII.2. Je užitečné jim porozumět, nějaké otázky podobného druhu se mohou objevit u zkoušky.

Cvičení 1: Nechť funkce f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$. Nechť $c \in \langle a, b\rangle$ a nechť g je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, která se se shoduje s funkcí f všude s výjimkou bodu c. Ukažte, že g má také Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a navíc $\int_a^b g = \int_a^b f$.

`Návod`: Použijte Větičku VIII.2(i). (Nejprve pro funkci f – k danému $\varepsilon > 0$ najděte příslušné dělení. Pak uvažte jeho zjemnění takové, že c je jeho dělícím bodem a dělící intervaly obsahující bod c jsou dostatečně malé.)

Cvičení 2: Nechť f a g jsou dvě funkce definované na intervalu $\langle a, b\rangle$, které se rovnají všude s výjimkou konečně mnoha bodů. Předpokládejme, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$. Ukažte, že g má také Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a navíc $\int_a^b g = \int_a^b f$.

`Návod`: Odvoďte ze Cvičení 1.

Cvičení 3: Nechť $a < c < b$ jsou reálná čísla a funkce f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ definovaná vzorcem

$$f(x) = \begin{cases} p & x \in \langle a, c\rangle, \\ q & x \in (c, b\rangle. \end{cases}$$

Ukažte, že $\int_a^b f = p(c-a) + q(b-c)$.

`Návod`: Použijte Větičku VIII.2(i) a dělení s dělícími body a, c, d, b, kde d je dost blízko c.

Cvičení 4: Nechť

$$D : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, která na otevřeném intervalu (x_{j-1}, x_j) je rovna konstantě c_j. Ukažte, že f má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$ a spočtěte ho.

`Návod`: Díky Cvičení 2 můžeme předpokládat, že $f = c_1$ na intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ a $f = c_j$ na intervalu $(x_{j-1}, x_j\rangle$ pro $j > 1$. Následně použijte Větičku VIII.2(i) pro dělení

$$D' : a = x_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n = b,$$

kde rozdíly $y_j - x_j$ jsou dost malé.

Poznámka: Následující cvičení nesouvisí přímo s Riemannovým integrálem, ale týkají se pojmu stejnoměrně spojité funkce. Tento pojem je v kapitole VIII pro nás čistě pomocný, slouží pouze k důkazu Věty VIII.5. Je to však obecně v matematice dosti důležitý pojem, s kterým se ještě setkáme v Matematice IV.

Tato cvičení slouží k lepšímu pochopení stejnoměrné spojitosti, ale nejsou nezbytná pro Matematiku II ani pro složení zkoušky.

Cvičení 5: Nechť f je funkce definovaná na intervalu I. Ukažte, že

$$\begin{aligned}&f \textit{ je stejnoměrně spojitá na intervalu } I \iff \\ &\qquad \forall \{x_n\}, \{y_n\} \textit{ posloupnosti v } I : x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0.\end{aligned}$$

`Návod:` Pro implikaci $\Rightarrow$ použijte definici stejnoměrné spojitosti a definici limity. Opačnou implikaci dokažte obměnou, postupem užitým v důkazu Věty VIII.4.

Cvičení 6: Ukažte, že funkce $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ není stejnoměrně spojitá na $(0, 1\rangle$.

`Návod:` Použijte Cvičení 5.

Cvičení 7: Nechť f je stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, 1)$. Ukažte, že f je omezená na $(0, 1)$.

`Návod:` Nechť $\delta > 0$ přísluší podle definice stejnoměrné spojitosti číslu $\varepsilon = 1$. Pak f je omezená na každém intervalu délky menší než δ. Interval $(0, 1)$ lze pokrýt konečně mnoha takovými intervaly.

Cvičení 8: Nechť f je funkce stejnoměrně spojitá na intervalu $(0, 1)$. Ukažte, že existují vlastní limity $\lim_{x\to 0+} f(x)$ a $\lim_{x\to 1-} f(x)$.

`Návod:` S použitím Cvičení 7 a Bolzano-Weierstrassovy věty ukažte, že existuje posloupnost $\{x_n\}$ z intervalu $(0, 1)$, pro kterou $x_n \to 0$ a $\lim f(x_n)$ existuje vlastní. Označme tuto limitu L. S použitím Cvičení 5 ukažte, že pro každou posloupnost $\{y_n\}$ z intervalu $(0, 1)$, která konverguje k 0, platí $f(y_n) \to L$. Z toho odvoďte, že $\lim_{x\to 0+} f(x) = L$. Pro limitu pro $x \to 1-$ postupujte podobně.

Cvičení 9: Nechť I je otevřený interval a f je funkce definovaná na I, která má v každém bodě $x \in I$ vlastní derivaci. Předpokládejme, že f' je omezená na I. Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na I.

`Návod:` Nechť $|f'| \leq M$ na I. Z Lagrangeovy věty odvoďte, že pro každé $x, y \in I$ platí $|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$. Ukažte, že z této podmínky plyne stejnoměrná spojitost.

Cvičení 10: Definujme stejnoměrnou spojitost pro funkce více proměnných takto: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je stejnoměrně spojitá na množině A, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in A : \rho(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. *Ukažte, že spojitá funkce na kompaktní množině je stejnoměrně spojitá.*

2. *Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá na množině A, právě když*

$$\forall \{x_n\}, \{y_n\} \text{ posloupnosti v } A : \rho(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

`Návod:` 1. Použijte stejný postup jako v důkazu Věty VIII.4.
2. Postupujte analogicky jako ve Cvičení 5.