**K oddílu VI.4 – soustavy lineárních rovnic**

**Základní značení, formulace úlohy a její řešení:**

- Budeme se zabývat soustavami $m$ lineárních rovnic o $n$ neznámých. Obecný tvar takové soustavy je v textech k přednášce označen (S). Zdůrazňuji, že počet neznámých ($n$) a počet rovnic ($m$) se může lišit. Případ $m = n$, tj. kdy počet neznámých je stejný jako počet rovnic, je důležitý speciální případ, kterému se věnuje mj. Věta VI.15.

- V soustavě (S) jsou předem zadaná čísla $a_{ij}$ (koeficienty) a $b_i$ (pravé strany). Symboly $x_j$ označují neznámé. Jde tedy o následující úlohu:

  Najít takové hodnoty $x_1, \dots, x_n$, aby všech $m$ rovností ze soustavy (S) platilo.

- Může se stát, že soustava nemá žádné řešení; může se stát, že má právě jedno řešení (tj. existuje právě jedna $n$-tice $x_1, \dots, x_n$, která soustavu splňuje); může se rovněž stát, že soustava má více různých řešení.

  Dále se naučíme rozlišovat mezi těmito možnostmi a také metodu, jak řešení najít.

- Soustavu (S) můžeme vyjádřit v maticovém tvaru $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kde $\mathbb{A}$ je matice soustavy (typu $m \times n$), $\boldsymbol{b}$ je vektor pravých stran (sloupcový vektor délky $m$) a $\boldsymbol{x}$ je neznámý sloupcový vektor délky $n$.

  Z definice maticového násobení plyne, že rovnost $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ je ekvivalentní $m$ rovnostem soustavy (S).

  Výhodou maticového zápisu je, že $m$ rovnic soustavy (S) lze zapsat jedinou (maticovou) rovnicí $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a pro analýzu řešení můžeme použít vlastnosti maticového násobení.

**Metoda eliminace a rozšířená matice soustavy**

- Základní metodu řešení soustavy (S) je metoda eliminace. Její základní princip spočívá v tvrzení:

  Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\boldsymbol{b}$ sloupcový vektor délky $m$. Předpokládejme, že aplikací nějaké transformace $T$ na matici $\mathbb{A}$ vznikne matice $\mathbb{A}'$ a aplikací téže transformace na vektor $\boldsymbol{b}$ vznikne vektor $\boldsymbol{b}'$. Pak soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ mají stejnou množinu řešení.

- Důkaz tohoto tvrzení: Stačí dokázat, že:

  Pro každý sloupcový vektor $\boldsymbol{x}$ délky $n$ platí $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

  Přitom implikace $\Rightarrow$ plyne přímo z Věty VI.6.

  K důkazu implikace $\Leftarrow$ použijme nejprve Větu VI.5(ii). Ta nám dá existenci transformace $T'$ takové, že aplikací $T'$ na $\mathbb{A}'$ vznikne $\mathbb{A}$ a aplikací $T'$ na $\boldsymbol{b}'$ vznikne $\boldsymbol{b}$. Nyní stačí již použít Větu VI.6 pro transformaci $T'$.

- Použití tohoto tvrzení:

  Mějme soustavu $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Matici $\mathbb{A}$ umíme pomocí nějaké transformace $T$ převést na schodovitou matici $\mathbb{A}'$. Aplikujeme tutéž transformaci na vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$ a dostaneme vektor $\boldsymbol{b}'$.

  Podle výše uvedeného tvrzení víme, že soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má stejnou množinu řešení jako $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

  Stačí tedy vyřešit soustavu $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$. Protože $\mathbb{A}'$ je schodovitá, je nalezení řešení snadné, jak si vysvětlíme a ilustrujeme později.

- Využití rozšířené matice soustavy: Nejjednodušší způsob, jak tutéž transformaci provést na $\mathbb{A}$ i na $\boldsymbol{b}$, je pracovat s rozšířenou maticí soustavy $(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$. Tu upravíme pomocí nějaké transformace na schodovitou matici $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$. To je také způsob, jak to v konkrétních příkladech děláme.

**K Větě VI.15**

- Tato věta se týká soustav s čtvercovou maticí, tj. případu, kdy počet neznámých je stejný jako počet rovnic.

- Co věta říká: Je formulována jako ekvivalence tří tvrzení, což je častý způsob formulace vět. Ale obsahem jsou následující dvě tvrzení:

  Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b}$ má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ právě jedno řešení. (To je přesně implikace $(i) \Rightarrow (ii)$.)

  Není-li $\mathbb{A}$ regulární, pak existuje taková pravá strana $\boldsymbol{b}$, že soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení. (To je implikace $non(i) \Rightarrow non(iii)$, která je obměnou implikace $(iii) \Rightarrow (i)$.)

  Je tedy jasné, že obě uvedená tvrzení z věty plynou. Naopak, pokud obě tvrzení platí, pak z nich plynou implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ a $(iii) \Rightarrow (i)$.

Protože implikace $(ii) \Rightarrow (iii)$ je triviální, dostaneme ekvivalenci všech tří tvrzení.

Z těchto úvah plyne, že stačí dokázat uvedená dvě tvrzení.

- Důkaz implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ (tj. prvního z uvedených tvrzení):

  Předpokládejme, že $\mathbb{A}$ je regulární. Uvažme tedy inverzní matici $\mathbb{A}^{-1}$.

  Vezměme nyní libovolný vektor $\boldsymbol{b}$ pravých stran (tj. libovolný sloupcový vektor délky $n$) a podívejme se, jak vypadá řešení soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

  Pokud $\boldsymbol{x}$ je řešením, tj. $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, pak platí

$$\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

  Protože maticové násobení je asociativní, můžeme levou stranu upravit

$$\mathbb{A}^{-1}(\mathbb{A}\boldsymbol{x}) = (\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A})\boldsymbol{x} = \mathbb{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

  To znamená, že $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Tím jsme ukázali, že jedině tento vektor může být řešením.

  Naopak, vektor $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ skutečně řešením je, protože

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}) = (\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1})\boldsymbol{b} = \mathbb{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

  Tím je důkaz hotov: Ukázali jsme, že vektor $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ je řešením a zároveň, že každé řešení musí mít tento tvar. Tedy existuje právě jedno řešení, a to $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

- Důkaz implikace $non(i) \Rightarrow non(iii)$ (tj. druhého z uvedených tvrzení):

  Předpokládejme, že $\mathbb{A}$ není regulární. Pak $h(\mathbb{A}) < n$ (viz Věta VI.7).

  Dále, matici $\mathbb{A}$ lze nějakou transformací $T$ převést na schodovitou matici $\mathbb{S}$ (Věta VI.5(i)).

  Platí $h(\mathbb{S}) = h(\mathbb{A}) < n$ (Věta VI.5(iii)), a tedy matice $\mathbb{S}$ má poslední řádek nulový.

  Nechť $\boldsymbol{b}'$ je sloupcový vektor délky $n$, který má na posledním místě číslo 1. (Jaká čísla má na ostatních místech, není podstatné, mohou být třeba nulová.) Pak soustava $\mathbb{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ nemá řešení. Důvod je ten, že poslední řádek matice $\mathbb{S}$ je nulový, a tedy, ať zvolíme $\boldsymbol{x}$ jakkoli, poslední prvek součinu $\mathbb{S}\boldsymbol{x}$ bude roven 0, a tak se tento součin nemůže rovnat $\boldsymbol{b}'$.

Nechť $T'$ je transformace odpovídající transformaci $T$ podle Věty VI.5(ii). Pak aplikací $T'$ na $\mathbb{S}$ vznikne $\mathbb{A}$.

Označme $\boldsymbol{b}$ vektor, který vznikne aplikací $T'$ na $\boldsymbol{b}'$. Pak soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má stejnou množinu řešení jako soustava $\mathbb{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ (viz výše vysvětlený princip eliminace).

Protože soustava $\mathbb{S}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ nemá řešení, ani soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení.

Tím je důkaz hotov.

- Ještě k významu této věty: Výše jsme si vysvětlili, co tato věta říká. Z důkazu plyne ještě jeden aspekt významu:

  Pokud $\mathbb{A}$ je regulární, pak pro každou pravou stranu $\boldsymbol{b}$ existuje právě jedno řešení. Toto řešení je navíc dáno vzorcem $\boldsymbol{x} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Máme tedy nejen „existenci a jednoznačnost řešení“, ale i vzoreček pro řešení.

**K Větě VI.16:**

- Na rozdíl od Věty VI.15 se tato věta týká obecného případu (počet neznámých a počet rovnic se nemusí shodovat).

  Jejím obsahem jsou dvě kritéria řešitelnosti soustavy (S).

- Důkaz ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3):

  Matice $\mathbb{A}$ je typu $m \times n$, má tedy $n$ sloupců. Označme tyto sloupce $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Každý z nich je sloupcový vektor délky $m$.

  Pokud $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je sloupcový vektor délky $n$, pak z definice maticového násobení plyne

  $$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$

  Nyní je ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) zřejmá:

Soustava (S) má řešení $\Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} \in M(n \times 1) : \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
$\Leftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n : x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \Leftrightarrow$ vektor $\boldsymbol{b}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (a to jsou sloupce matice $\mathbb{A}$).

- Důkaz ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2):

**Úvodní úvahy:** Uvažme rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$. Podle Věty VI.5(i) můžeme tuto matici nějakou transformací převést na schodovitou matici $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$.

Podle principu eliminace vysvětleného výše víme, že soustavy $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ a $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ mají stejnou množinu řešení.

Dále, podle Věty VI.5(iii) platí zároveň $h(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}') = h(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$ a $h(\mathbb{A}') = h(\mathbb{A})$.

Protože $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$ je schodovitá matice, je schodovitá i matice $\mathbb{A}'$, tedy hodnost každé z těchto matic je rovna počtu nenulových řádků. Je ovšem jasné, že matice $\mathbb{A}'$ nemůže mít více nenulových řádků než matice $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$.

Proto máme $h(\mathbb{A}') \leq h(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$, a tedy i $h(\mathbb{A}) \leq h(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$.

**Důkaz implikace** (1) $\Rightarrow$ (2)**:** Dokážeme obměnu, tj. implikaci $non(2) \Rightarrow non(1)$.

Předpokládejme, že $h(\mathbb{A}) \neq h(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$. Podle úvodních úvah dostáváme $h(\mathbb{A}') < h(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$. To znamená, že matice $\mathbb{A}'$ má méně nenulových řádků (a tedy více nulových řádků) než matice $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$.

Proto existuje takové $j$, že $j$-tý řádek matice $\mathbb{A}'$ je nulový, ale $j$-tý řádek matice $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$ není nulový, tedy vektor $\boldsymbol{b}'$ má na $j$-tém místě nenulové číslo.

To ovšem znamená, že soustava $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ nemá řešení. Důvod je ten, že v $j$-tém řádku součinu $\mathbb{A}'\boldsymbol{x}$ je součin $j$-tého řádku matice $\mathbb{A}'$ a $\boldsymbol{x}$. To je ovšem nula, a tedy se součin $\mathbb{A}'\boldsymbol{x}$ nemůže rovnat $\boldsymbol{b}'$.

Tedy ani soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nemá řešení.

**Důkaz implikace** (2) $\Rightarrow$ (1)**:** Předpokládejme, že $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\boldsymbol{b})$. Pak $h(\mathbb{A}') = h(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$, a tedy matice $\mathbb{A}'$ a $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$ mají stejný počet nenulových řádků. Ukážeme, že soustava $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ má řešení. Tím budeme hotovi.

Použijeme podobné značení a přístup, jaký jsme použili v oddílu VI.2, když jsme zdůvodňovali, že nenulové řádky ve schodovité matici jsou lineárně nezávislé.

Označme $p = h(\mathbb{A}')(= h(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}'))$. To znamená, že prvních $p$ řádků v matici $\mathbb{A}'$ je nenulových a všechny další řádky jsou nulové (a to i v matici $(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}')$).

Pro $j = 1, \ldots, p$ nechť $k_j$ je pořadí sloupce, v němž je první nenulový prvek v $j$-tém řádku matice $\mathbb{A}'$. Protože tato matice je schodovitá, platí

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq n.$$

Nyní najdeme řešení „odzadu“:

$p$-tá rovnice má tvar

$$a'_{p,k_p} x_{k_p} + \cdots + a'_{p,n} x_n = b'_p.$$

(Pokud $k_p = n$, pak má tvar $a'_{p,k_p} x_{k_p} = b'_p$, neboli $a'_{p,n} x_n = b'_p$.) Zvolíme $x_{k_p} = \frac{b'_p}{a'_{p,k_p}}$ a $x_i = 0$ pro $i > k_p$. To je možné, protože $a'_{p,k_p} \neq 0$. Při této volbě bude $p$-tá rovnice splněna.

Dále se podíváme na $(p-1)$-tou rovnici. Ta má tvar

$$a'_{p-1,k_{p-1}} x_{k_{p-1}} + \cdots + a'_{p-1,k_p} x_{k_p} + \cdots + a'_{p-1,n} x_n = b'_{p-1}.$$

Dosadíme již dříve určené hodnoty neznámých $x_i$ pro $i \geq k_p$ a zvolíme $x_i = 0$ pro $k_{p-1} < i < k_p$. Tím rovnice přejde na tvar

$$a'_{p-1,k_{p-1}} x_{k_{p-1}} + a'_{p-1,k_p} x_{k_p} = b'_{p-1},$$

kde hodnotu $x_{k_p}$ již známe. Protože $a'_{p-1,k_{p-1}} \neq 0$, snadno z této rovnice vyjádříme $x_{k_{p-1}}$.

A tak pokračujeme dále až k první rovnici a najdeme $n$-tici $x_1, \ldots, x_n$, která je řešením soustavy.

Postup lze shrnout takto: Za neznámé $x_i$, kde $i$ není jedna z hodnot $k_1, \ldots, k_p$, zvolíme hodnotu 0. Při této volbě z rovnic postupně vyjádříme (jednoznačně) $x_{k_p}, x_{k_{p-1}}, \ldots, x_{k_1}$, přitom postupujeme odzadu – od $p$-té rovnice k první.

**Ilustrace důkazu implikace** (2) $\Rightarrow$ (1) **na příkladu:** Nechť

$$(\mathbb{A}'|\boldsymbol{b}') = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hodnost matice soustavy i rozšířené matice soustavy je 3. Této matici odpovídá soustava

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 + x_5 + 7x_6 &= 1 \\ 3x_3 + x_4 \qquad + x_6 &= 0 \\ 5x_6 &= 2 \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice dostaneme $x_6 = \frac{2}{5}$.
Pro řešení druhé zvolíme $x_4 = x_5 = 0$ a dosadíme již určenou hodnotu $x_6$. Dostaneme rovnici

$$3x_3 + \frac{2}{5} = 0,$$

odkud spočteme $x_3 = -\frac{2}{15}$.
Pro řešení první rovnice dosadíme již určené hodnoty a zvolíme $x_2 = 0$. Dostaneme rovnici

$$x_1 + \frac{14}{5} = 1,$$

odkud spočteme $x_1 = -\frac{9}{5}$.
Jedno z řešení je tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{15} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

**Poznámka k důkazu implikace** (2) $\Rightarrow$ (1)**:** Uvedený postup ukazuje, jak lze nalézt jedno řešení soustavy. Nalezení všech řešení soustavy je o něco složitější, příslušná metoda je mírnou modifikací popsaného postupu. O tom více na jiném místě.

- Jaký je význam této věty:

Ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) je snadným důsledkem definic, jak je patrné z jejího důkazu. Pro praktické počítání použitelná není, její význam je spíše teoretický, umožňuje lepší pochopení toho, co znamená řešení soustavy (S).

Ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) naproti tomu formuluje to, s čím se při praktickém počítání setkáváme. Pokud soustavu řešíme metodou eliminace, po převedení na schodovitou matici je již zřejmé, zda řešení existuje nebo neexistuje.

- Jiná možnost důkazu: Viděli jsme, že ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) je snadným důsledkem definic. Lze si rozmyslet, že ekvivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) je nepříliš obtížným důsledkem definic a toho, že hodnost matice a matice transponované (neboli řádková a sloupcová hodnost matice) se rovnají. Tak by bylo možné větu také dokázat. Nevýhodou je, že tento postup je abstraktnější a nedává žádný návod, jak nějaké řešení najít.

*Cvičení: Ukažte, že rozšířená matice soustavy sice může mít větší hodnost než matice soustavy, ale nejvíce o* 1*.*

**K Větě VI.17 a jejímu důsledku:**

- Tato věta se zabývá pouze speciálním případem: Je-li počet rovnic a počet neznámých stejný a navíc matice soustavy je regulární, pak dává alternativní vzoreček pro řešení.

- Důkaz Věty VI.17:

  Nechť $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Označme $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ sloupce matice $\mathbb{A}$. Z definice maticového násobení plyne

  $$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

  (viz důkaz ekvivalence (1) $\Leftrightarrow$ (3) Věty VI.16).

  Ukážeme, jak z toho vztahu vyjádříme $x_1, \dots, x_n$. Nejprve to uděláme pro $x_1$ a pak vysvětlíme, že ostatní případy jsou analogické.

  Z uvedené rovnosti plyne, že

  $$x_1\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b} + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

  To lze přepsat jako

  $$1 \cdot (x_1\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}) + x_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}.$$

Máme tedy lineární kombinaci vektorů

$$x_1\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n, \qquad (*)$$

která je rovna nulovému vektoru. Tato lineární kombinace je netriviální, protože koeficient u $x_1\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b}$ je nenulový (je totiž roven 1). Proto jsou tyto vektory lineárně závislé.

Vezměme si nyní matici $\mathbb{C}$, jejíž sloupce jsou právě vektory $(*)$. Pak $\mathbb{C}$ je čtvercová matice řádu $n$, jejíž sloupce jsou lineárně závislé. Proto není regulární.

(Používáme, Větu VI.7 a fakt, že řádková i sloupcová hodnost se shodují. Lze postupovat i jinak, bez použití tohoto faktu: Matice $\mathbb{C}$ má lineárně závislé sloupce, tedy matice $\mathbb{C}^T$ má lineárně závislé řádky. Proto $h(\mathbb{C}^T) < n$. Tudíž, podle Věty VI.7 matice $\mathbb{C}^T$ není regulární. Proto podle Věty VI.4(b) ani $\mathbb{C}$ není regulární.)

Z Věty VI.11 je tedy $\det \mathbb{C} = 0$.

Připomeňme, že

$$\mathbb{C} = (x_1\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n),$$

kde jsou vyznačeny sloupce matice. Podle sloupcové varianty Lemmatu VI.9 dostaneme

$$0 = \det \mathbb{C} = \det(x_1\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n) + \det(-\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n).$$

Aplikací sloupcové varianty Věty VI.10(ii) dostaneme

$$0 = x_1 \det(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n) - \det(\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n),$$

tedy

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)},$$

což je přesně vzorec pro $x_1$ ze znění věty.

Vzorce pro ostatní neznámé se odvodí podobně:

Nechť $j \in \{1, \dots, n\}$ je libovolné. Pak

$$x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_{j-1} \cdot \boldsymbol{a}_{j-1} + 1 \cdot (x_j\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b}) + x_{j+1} \cdot \boldsymbol{a}_{j+1} + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o},$$

tedy vektory

$$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_{j-1}, x_j\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \dots, \boldsymbol{a}_n$$

jsou lineárně závislé, a proto

$$\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_{j-1} \quad x_j\boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_{j+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n) = 0.$$

S použitím sloupcových variant Lemmatu VI.9 a Věty VI.10(ii) analogicky jako výše dostaneme

$$x_j = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_{j-1} \quad \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}_{j+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_{j-1} \quad \boldsymbol{a}_j \quad \boldsymbol{a}_{j+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)},$$

což je přesně vzorec pro $x_j$ ze znění věty.

- Význam Věty VI.17: Jak už bylo řečeno výše, přínosem této věty je další explicitní vzoreček pro řešení.

  Tento vzoreček však není příliš vhodný pro praktické počítání (pro $n = 2$ je velmi jednoduchý, ale pro vyšší $n$ není jeho použití efektivní).

  Význam je spíše teoretický – je důležité, že takovýto vzoreček existuje a plyne z něho například důsledek Věty VI.17 o tom, že „řešení soustavy s danou regulární maticí spojitě závisí na vektoru pravých stran“. Tento důsledek plyne z Věty VI.17 a poznámky z oddílu VI.4 o spojitosti determinantu jako funkce $n^2$ proměnných.

- Další aplikací Věty VI.17 je vzorec pro výpočet inverzní matice:

  Je-li $\mathbb{A}$ regulární matice, pak inverzní matice $\mathbb{A}^{-1}$ splňuje $\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$. Tedy

  $$\mathbb{A} \cdot (j\text{-tý sloupec } \mathbb{A}^{-1}) = (j\text{-tý sloupec } \mathbb{I}).$$

  Přitom $j$-tý sloupec $\mathbb{I}$ je vektor $\boldsymbol{e}_j$, který má na $j$-tém místě číslo 1 a jinde má nuly.

  Proto $j$-tý sloupec matice $\mathbb{A}^{-1}$ je řešením soustavy

  $$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_j,$$

  tedy matice $\mathbb{A}^{-1}$ má (podle Věty VI.17) na místě $ij$ prvek

  $$\frac{\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)}{\det(\boldsymbol{a}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_{i-1} \quad \boldsymbol{a}_i \quad \boldsymbol{a}_{i+1} \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n)} = \frac{(-1)^{i+j} \det \mathbb{A}_{ji}}{\det \mathbb{A}},$$

  kde rovnost plyne z rozvoje determinantu podle $i$-tého sloupce (Věta VI.14).