

## ABSOLUTNÍ HODNOTA A JEJÍ VÝZNAM

1. Nechť  $x, y, c \in \mathbf{R}$ , přičemž  $c > 0$ . Pak  $|x - y| < c$ , právě když  $x \in (y - c, y + c)$ .
2. Vyjádřete analogicky vztahy  $|x - y| \leq c$ ,  $|x - y| > c$ ,  $|x - y| \geq c$ .
3. Vyjádřete jednoduše množinu  $\{x \in \mathbf{R} : |||x| - 1| - 2| - 3| < 1\}$ .

## DŮKAZY METODOU MATEMATICKÉ INDUKCE

4. Pro každé  $n \in \mathbf{N}$  platí  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .
5. Pro každé  $n \in \mathbf{N} \setminus \{3\}$  platí  $n^2 \leq 2^n$ .
6. Nechť  $n, k \in \mathbf{N}$ . Pak existují  $q, r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ , pro která platí  $r < k$  a  $n = qk + r$ . (Dělení se zbytkem)
7. Nechť  $n \in \mathbf{N}$  a  $a_1, \dots, a_n$  jsou nezáporná čísla. Pak platí

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

přičemž rovnost nastává jen v případě, že jsou všechna čísla  $a_1, \dots, a_n$  stejná. (Nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, AG nerovnost)

## VÝROKY, VÝROKOVÉ SPOJKY, KVANTIFIKÁTORY A JEJICH POUŽITÍ

8. Vyjádřete jednoduše množinu  $\{a \in \mathbf{R} : (\forall x \in \mathbf{R})(|x - 2| \leq 1 \Rightarrow x^2 - ax > 5)\}$ .
9. Uvažme následující výroky:

- (i)  $(\forall x \in M)(\exists y \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
- (ii)  $(\exists y \in M)(\forall x \in M)(\exists z \in M)(x = y + z)$
- (iii)  $(\exists y \in M)(\exists z \in M)(\forall x \in M)(x = y + z)$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je-li

- a)  $M = \mathbf{N}$ , b)  $M = \mathbf{N} \cup \{0\}$ , c)  $M = (0, 1)$ , d)  $M = \{0\}$ ?

10. Jsou pravdivé následující výroky?

- a)  $(\forall a \in \mathbf{R})(\exists \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbf{R})(\forall x \in \mathbf{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$
- b)  $(\exists a \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\exists x \in \mathbf{R})(x \in (a, a + \varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1)$

Napište negace těchto výroků.

11. Vyjádřete co nejjednodušeji vztah mezi čísly  $a, b \in \mathbf{R}$  určený formulí:

- a)  $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < c)$ ,
- b)  $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(a - x < c \Rightarrow |b - x| < c)$ ,
- c)  $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(|a - x| < c \Rightarrow b - x < c)$ ,
- d)  $(\forall c > 0)(\forall x \in \mathbf{R})(a - x < c \Rightarrow b - x < c)$ ,
- e)  $(\forall x \in \mathbf{R})(\exists u > 0)(\forall c \in (0, u))(|a - x| < c \Rightarrow |b - x| < u)$ .

**12.** Necht'  $A \subset \mathbf{R}$  je neprázdná množina. Předpokládejme, že má nejmenší prvek (tj. **minimum**, značíme  $\min A$ ). Ukažte, že  $\inf A = \min A$ .

Analogické tvrzení zformulujte a dokažte pro největší prvek (tj. **maximum**,  $\max A$ ).

**13.** Nalezněte suprema a infima (případně maxima a minima) následujících množin (pokud existují):

a)  $A = \langle 0, 1 \rangle$ ,    b)  $B = \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\}$ ,    c)  $C = \{1, -5, 7, -3, 50\}$ ,

d)  $D = (-1, 0) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ ,    e)  $E = (1, 2) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ .

**14.** Necht'  $A, B \subset \mathbf{R}$  jsou neprázdné omezené množiny. Označme  $s = \inf A$ ,  $S = \sup A$ ,  $t = \inf B$ ,  $T = \sup B$ .

(a) Vyjádřete  $\inf(A \cup B)$  a  $\sup(A \cup B)$  pomocí hodnot  $s, S, t, T$ .

(b) Lze něco říci o  $\inf(A \cap B)$  a  $\sup(A \cap B)$ ?

(Uvažte případ, kdy  $A = (-1, 1)$  a  $B = \{-1, 1\}$  nebo  $B = \{-1, 0, 1\}$  nebo  $B = \{-1, 0, \frac{1}{2}\}$ .)

LIMITA POSLOUPNOSTI

**15.** Spočtěte následující limity posloupností:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$ ,    (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n} - \frac{7}{n^5}}{7 - \frac{3}{n^2}}$ ,    (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+7}{5n+3}$ ,    (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+7)}{n^2+5n+15}$ ,

(e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+15} - \sqrt{n+1})$ ,    (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3})$ ,    (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1} - n}{\sqrt[4]{n^4+1} - \sqrt{n^2+1}}$ ,

(h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}$ ,    (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}$ .

**16.** Necht'  $\{a_n\}$  je posloupnost kladných čísel splňující  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  nebo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ . Pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**17.** Pomocí uvedeného tvrzení spočtěte limity:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ ,    (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!}$ ,    (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2^n + 17^n}{n! + n + 3^n}$ .

**18.** Pomocí věty o limitě monotónní posloupnosti spočtěte limity:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n$ ,  $z \in \langle 0, \infty \rangle$ ,

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kde  $a_1 = 0$  a  $a_{n+1} = \frac{1+a_n}{k}$  (kde  $k > 1$  je parametr),

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kde  $a_1 = 0$  a  $a_{n+1} = \frac{1-a_n}{2}$ .

JEŠTĚ LIMITA POSLOUPNOSTI

**19.** Nechť  $\{a_n\}$  je posloupnost nezáporných reálných čísel,  $a \geq 0$  a  $p \in \mathbf{N}$ . Pak platí:

- (a)  $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n^p \rightarrow a^p \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$ .  
 (b)  $a_n \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a_n^p \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \sqrt[p]{a_n} \rightarrow +\infty$ .

**20.** Některé příklady ze zkouškových písemek z minulých let:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^{100} - (4 - \frac{3}{n})^{50}}{(8 - \frac{1}{n})^{34} - (4 + \frac{1}{n})^{51}}$       (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt[3]{n^3 - 1}] + [\sqrt[3]{n^3 + 1}]}{\sqrt[3]{1 + 2^n + \dots + n^n}}$   
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[4]{n^4 + 4n^3 - n} \right]$       (d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n - 1}}$   
 (e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 7)^{50} - (n^2 + 1)^{25}}{\sqrt{n^{100} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}}$

REÁLNÉ FUNKCE REÁLNÉ PROMĚNNÉ

**21.** Nechť  $f, g$  jsou funkce spojité v bodě  $a \in \mathbf{R}$ . Pak i funkce  $\max\{f, g\}$  a  $\min\{f, g\}$  jsou spojité v bodě  $a$ .

Funkce  $\max\{f, g\}$  je definována takto:

$$\max\{f, g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad x \in D_f \cap D_g.$$

Stejně tvrzení platí i pro spojitost zleva a zprava.

**22.** Určete ve kterých bodech jsou spojité (případně zleva, zprava) funkce:

- (a)  $f(x) = \max\{x, x^2\}$       (b)  $f(x) = \min\{x, \operatorname{sgn} x\}$

LIMITA FUNKCE

**23.** Spočtěte následující limity:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$ ,      (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ ,      (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$ ,      (d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot (\sqrt{1+x^2} + x)$ ,  
 (e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ ,      (f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$ ,      (g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2}{2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2}$ ,  
 (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ,      (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ,      (j)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \operatorname{tg} x$ ,      (k)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{\cos(\frac{\pi}{2} \cos x)} \cdot x^k, k \in \mathbf{Z}$ ,  
 (l)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2)}{x^3 - 1}$ ,      (m)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \log \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5}$ ,      (n)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 15)}{\log(x^{15} + 3)}$ ,      (o)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 2^x}{x}$ ,  
 (p)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x + 1}{x + 3} \right)^{5x - x^2}$ ,      (q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{1/x}$ .

24. (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^6} - 1}}{x \log \cos x}$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log \sin x \cdot \operatorname{tg}^2 x$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} (4x^2 - 9\pi^2) \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ , (e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$ ,  
 (f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n^6 + 5n^3 + 1) - \log(n^6 + 1))(n^3 + \cos n)$ , (g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 2^n}{n^8 + 2^n} \right)^{2^n/n^8}$ ,  
 (h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)^x$ , (i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x+1} - 2 - 1}{\sqrt{1 - \cos x}}$ , (j)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2^{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x}} - 2^{1/x})$ .

SPOJITOST A DERIVACE FUNKCÍ

25. Pro následující funkce vyšetřete spojitost a spočtěte derivaci, včetně jednostranných:

- (a)  $(x^8 + x^6 - 1)^{157}$ , (b)  $\sin(x^3 \cos(\log x))$ , (c)  $\frac{e^{x^5} \cos(x+7)}{\log(x^4+1)}$ ,  
 (d)  $x^x$  (jak funkci definovat v nule?), (e)  $x^{x^x}$ , (f)  $\arcsin(\sin x)$ , (g)  $\arcsin \frac{4x}{x^2+4}$ ,  
 (h)  $\max\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\}$ , (i)  $(x+2)^2 \sqrt{|x^2-4|}$ , (j)  $\sqrt{e^{\sin^2 x} - 1}$ , (k)  $\min\{x^2, \sqrt[3]{x}\}$ ,  
 (l)  $\arcsin \min\{1, \frac{1}{x}\}$ , (m)  $\cos x \cdot [\sin x]$ , (n)  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}$ .

PRŮBĚH FUNKCE

26. Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

- (a)  $\log\left(x + \frac{1}{x}\right)$ , (b)  $\sqrt[5]{3x^5 + 5x^3}$ , (c)  $\sqrt[5]{1 - \sqrt{x+1}}$ , (d)  $\sin x + \frac{1}{6 \sin x}$ , (e)  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{4 \cos^2 x}$ ,  
 (f)  $\frac{e^{|x|}}{|e^x - 3|}$ , (g)  $\sqrt{x} + \arcsin \frac{1-x}{1+x}$ , (h)  $x^{2-3 \log x}$ , (i)  $\frac{4^x - \frac{5}{2}}{(2^x - 2)^2}$ .