Tvrzení: Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$, $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$.
Pak $x_1 + \dots + x_n \geq n$, přičemž rovnost nastává pouze v případě, že $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$

Důkaz indukcí:

$n = 1$ ... triviální

$n = 2$: Nechť $x_1, x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 = 1$

Pokud $x_1 = x_2 = 1$, pak $x_1 + x_2 = 2$

Pokud nejsou obě čísla rovna 1, pak jedno z nich je > 1 a druhé je < 1.

Předpokládejme, že $x_1 < 1$, $x_2 > 1$

Pak $1 - x_1 > 0$, $x_2 - 1 > 0$, tedy

$$(1 - x_1)(x_2 - 1) > 0$$

$$\|$$

$$x_2 - 1 - \underbrace{x_1 x_2}_{=1} + x_1 = x_1 + x_2 - 2$$

Tedy $x_1 + x_2 > 2$

Indukční krok: Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že tvrzení pro toto n platí. Ukážeme, že platí i pro $n+1$.

Vezměme $x_1, \dots, x_{n+1} > 0$ splňující $x_1 \cdot x_2 \cdots x_{n+1} = 1$

Pokud $x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1} = 1$, pak $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n + 1$.

Předpokládejme, že nejsou všechna rovna 1. Pak nutně aspoň jedno je < 1 a aspoň jedno je > 1.

Protože nezáleží na pořadí čísel $x_1, \dots, x_{n+1}$, můžeme předpokládat, že $x_n < 1$ a $x_{n+1} > 1$

Pak platí $(1-x_n)(x_{n+1}-1) > 0$

$$\| $$

$$x_{n+1} - x_n x_{n+1} - 1 + x_n$$

Tedy $x_n + x_{n+1} > x_n x_{n+1} + 1 \qquad (*)$

Proto $x_1 + \cdots + x_{n+1} = (x_1 + \cdots + x_{n-1}) + (x_n + x_{n+1}) \geq$

$$\overset{(*)}{\geq} \underbrace{x_1 + \cdots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}} + 1 \geq n+1$$

$\geq n$ dle indukčního předpokladu, neboť $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ je $\underline{n}$ kladných čísel a

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot (x_n \cdot x_{n+1}) = 1.$$

Tedy $x_1 + \cdots + x_{n+1} > n+1$ a důkaz je hotov.