Vzorový zkouškový teoretický test

1. Napište příklad podmnožiny $\mathbb{R}^2$, která není ani otevřená ani uzavřená. (0.5 bodu)

2. Napište příklad podmnožiny $\mathbb{R}$, která je omezená, ale není kompaktní. (0.5 bodu)

3. Napište příklad podmnožiny $\mathbb{R}^2$, pro kterou jsou $[0,0]$ a $[2,0]$ vnitřní body a $[1,0]$ je její hraniční bod. (1 bod)

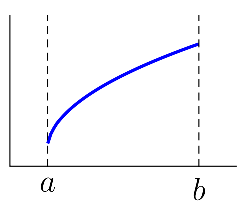
4. Napište příklad funkce f definované na $\mathbb{R}^2$, pro kterou platí $\frac{\partial f}{\partial x} = 5$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ na celém $\mathbb{R}^2$. (1 bod)

5. Nechť $f = f(x,y)$ je funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$. Definujme funkci $g(u,v) = f(u^2+v^2, u^2-v^2)$. Vyjádřete parciální derivace $\frac{\partial g}{\partial u}$ a $\frac{\partial g}{\partial v}$ pomocí parciálních derivací funkce f. (0.5 bodu)

6. Nechť f je funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$, pro kterou $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ na celém $\mathbb{R}^2$. Co lze o takové funkci říci? (1 bod)

7. Napište příklad funkce definované na $\mathbb{R}$, která je zároveň ryze konvexní a ryze kvazikonkávní. (0.5 bodu)

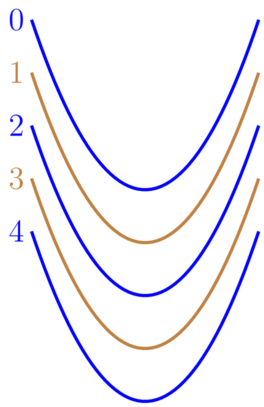
8. Mějme funkci na intervalu (a,b), jejíž graf je načtrtnut na obrázku:

   Je tato funkce konvexní, ryze konvexní, konkávní, ryze konkávní, kvazikonkávní, ryze kvazikonkávní, kvazikonvexní, ryze kvazikonvexní?

   Vyberte všechny správné možnosti. (1 bod)

9. Nechť f je funkce definovaná na $\mathbb{R}^2$, jejíž některé vrstevnice jsou vyznačeny na obrázku:



Může být taková f kvazikonkávní, ryze kvazikonkávní, kvazikonvexní, ryze kvazikonvexní?

Vyberte všechny správné možnosti. (1 bod)

10. Jakého typu mohou být matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, aby jejich součin $\mathbb{AB}$ byl matice typu 3×5? (0.5 bodu)

11. Napište příklad matice $\mathbb{A}$ typu 3×3, která není nulová, ale $\mathbb{A}^2$ je nulová matice. (1 bod)

12. Jakého typu musí být matice $\mathbb{A}$, aby $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$ byla matice typu 5×5 a $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ byla matice typu 3×3? (0.5 bodu)

13. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu 3×3. Najděte takovou matici $\mathbb{B}$, aby součin $\mathbb{AB}$ byl sloupcový vektor, který je součtem všech sloupců matice $\mathbb{A}$. (1 bod)

14. Napište příklad matice $\mathbb{A}$ typu 3×3, která má všechny prvky nenulové a přitom má hodnost 1. (0.5 bodu)

15. Které z následujících trojic vektorů jsou lineárně nezávislé?

    (a) $[1, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 0, 0]$;
    (b) $[1, 1, 1], [1, 0, 1], [0, 1, 0]$;
    (c) $[1, 1, 1], [1, 0, 1], [0, 0, 1]$;
    (d) $[1, 1, 1], [1, 0, 1], [0, 2, 0]$.

    (1 bod)

16. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$ regulární? (0.5 bodu)

17. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu 4×4. Najděte matici $\mathbb{B}$, aby $\mathbb{BA}$ byla matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením prvního a třetího řádku číslem 3. (1 bod)

18. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $n \times n$. Jak se změní její determinant, pokud celou matici vynásobíme číslem 7? (1 bod)

19. Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $n \times n$. Pro $x \in \mathbb{R}$ nechť $\mathbb{A}_x$ je matice, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynásobením prvního řádku číslem x. Spočtěte derivaci funkce $f(x) = \det \mathbb{A}_x$. (1 bod)

20. Nechť $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Pro jaké pravé strany $\boldsymbol{b}$ má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ řešení? (1 bod)

21. Která z následujících zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární?

    (a) $f(x_1, x_2, x_3) = [0, x_1]$;
    (b) $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 - x_2, x_2 - 5x_3]$;
    (c) $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + x_2x_3, x_3]$;
    (d) $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + x_2, 2 - 5x_3]$.

    (1 bod)

22. Napište reprezentující matici lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ daného vzorcem $f(x_1, x_2) = [x_1 + x_2, x_1 - 3x_2, x_2]$. (0.5 bodu)

23. Nechť $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $(1\ \ 5\ \ -1\ \ 0)$. Spočtěte $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_4}$. (0.5 bodu)

24. Mějme řadu $\sum_n a_n$ takovou, že $a_{2n} = -a_{2n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Co to znamená pro posloupnost částečných součtů? (1 bod)

25. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo $0 < a_n < \frac{1}{n}$ a přitom řada $\sum_n a_n$ divergovala. (1 bod)

26. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby platilo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$$

a přitom řada $\sum_n a_n$ konvergovala. (1 bod)

27. Najděte posloupnost $\{a_n\}$, aby řada $\sum_n a_n$ divergovala a přitom uzávorkovaná řada

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + \dots$$

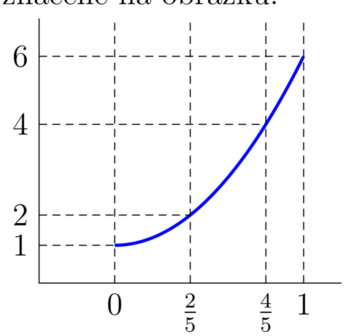
konvergovala. (1 bod)

28. Které z následujících řad konvergují?

    (a) $\sum_n \frac{n+1}{n^4+n}$;
    (b) $\sum_n \frac{n-7}{\sqrt{n^3+2}}$;
    (c) $\sum_n \frac{n^7}{7^n}$;
    (d) $\sum_n \frac{2^n}{n!}$.

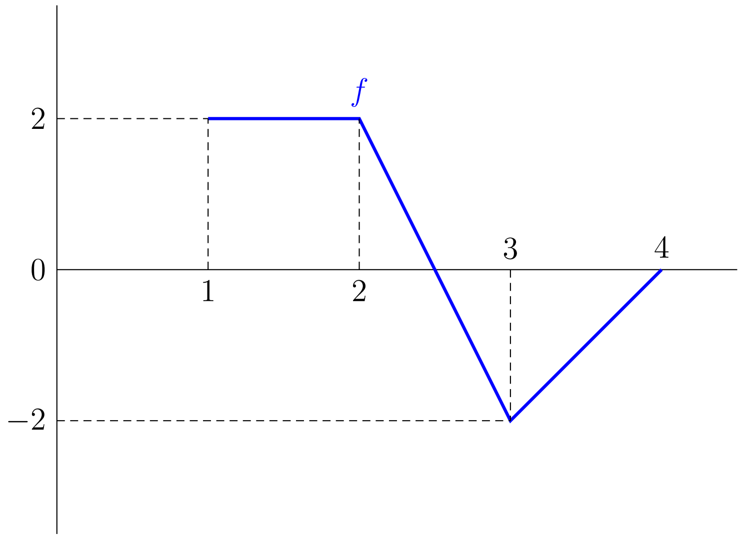
    (1 bod)

29. Spočtěte horní a dolní součet pro funkci a dělení intervalu $\langle 0, 1\rangle$ vyznačené na obrázku:



(1 bod)

30. Spočtěte Riemannův integrál přes interval $\langle 1, 4 \rangle$ pro funkci vyznačenou na obrázku:



(1 bod)