

III. Harmonické funkce v \mathbb{R}^2 a jejich vztah k holomorfním

Definice. Necht $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Funkce $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá **harmonická**, jestliže je spojitá na G a na G splňuje

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Poznámka. Stejně lze definovat i harmonické funkce s hodnotami v \mathbb{C} . Pak ovšem f je harmonická, právě když $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ jsou harmonické.

Větička 1. Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená.

(i) Je-li $f \in H(G)$, pak funkce f_1, f_2 definované předpisem

$$f_1(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad f_2(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

jsou harmonické na G (při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2).

(ii) Necht $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ je harmonická (při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2). Je-li navíc $f \in C^2(G)$, pak platí:

- Funkce

$$g(x + iy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

je holomorfní na G .

- Pokud $\overline{G} \setminus G$ je souvislá množina, pak existuje $\tilde{f} \in H(G)$, splňující $\operatorname{Re} \tilde{f}(x + iy) = f(x, y)$ na G .

Důsledek. Necht $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a f je holomorfní funkce na G , která na G nenabývá nuly. Pak funkce $g(x, y) = \ln |f(x + iy)|$ je harmonická na G (při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2).

Poznámka. Z Věty 6 níže plyne, že harmonické funkce jsou automaticky třídy C^∞ .

Definice. **Poissonovým jádrem** rozumíme funkci definovanou předpisem

$$P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \quad t \in \mathbb{R}, r \in [0, 1).$$

Větička 2 (vlastnosti Poissonova jádra).

- $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \frac{e^{it} + r e^{i\theta}}{e^{it} - r e^{i\theta}} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}$ pro $r \in [0, 1)$, $t, \theta \in \mathbb{R}$.
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = 1$ pro $r \in [0, 1)$.
- Pro každé $r \in [0, 1)$ je P_r kladná sudá 2π -periodická funkce; je-li navíc $r > 0$, je P_r klesající na $[0, \pi]$.
- Není-li t celočíselným násobkem 2π , je $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(t) = 0$.

Poznámka. Symbolem \mathbb{T} značíme jednotkovou kružnici, tj. $\{e^{it}, t \in \mathbb{R}\}$. Funkce na \mathbb{T} přirozeně ztotožňujeme s 2π -periodickými funkcemi na \mathbb{R} , míry na \mathbb{T} s mírami na $[-\pi, \pi)$, případně na $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definice.

- Necht $f \in L^1(\mathbb{T})$. **Poissonovým integrálem** funkce f rozumíme funkci $P[f]$ definovanou na $U(0, 1)$ předpisem

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt, \quad r \in [0, 1), \theta \in \mathbb{R}.$$

- Necht μ je borelovská míra (znaménková, případně komplexní) na \mathbb{T} . **Poissonovým integrálem** míry μ rozumíme funkci $P[d\mu]$ definovanou na $U(0, 1)$ předpisem

$$P[d\mu](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi)} P_r(\theta - t) d\mu(t), \quad r \in [0, 1), \theta \in \mathbb{R}.$$

Větička 3. Je-li μ komplexní borelovská míra na \mathbb{T} , je $P[d\mu]$ harmonická na $U(0, 1)$. Speciálně pro $f \in L^1(\mathbb{T})$ je $P[f]$ harmonická na $U(0, 1)$.

Navíc, je-li μ reálná, je $P[d\mu]$ reálná funkce. Je-li μ nezáporná, je $P[d\mu]$ nezáporná funkce. Stejný vztah platí mezi f a $P[f]$.

Větička 4 (varianta reziduové věty). Necht' $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ a $M \subset U(a, R)$ je konečná množina. Necht' f je komplexní funkce spojitá na $\overline{U(a, R)} \setminus M$ a holomorfní na $U(a, R) \setminus M$. Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru R , pak

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f.$$

Důsledek (Poissonův integrál pro holomorfní funkce). Necht' $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$ a f je komplexní funkce spojitá na $\overline{U(a, R)}$ a holomorfní na $U(a, R)$. Pak pro každé $r \in [0, R)$ a každé $\theta \in \mathbb{R}$ platí:

- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \cdot \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}} dt = 2f(a + re^{i\theta}) - f(a);$
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \cdot \frac{Re^{-it} + re^{-i\theta}}{Re^{-it} - re^{-i\theta}} dt = f(a);$
- $f(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \cdot \operatorname{Re} \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}} dt.$

Věta 5 (řešení Dirichletovy úlohy na kruhu). Necht' f je spojitá funkce na \mathbb{T} . Definujme funkci Hf předpisem

$$Hf(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(e^{i\theta}), & r = 1, \theta \in \mathbb{R}, \\ P[f](re^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}, & r \in [0, 1), \theta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pak funkce Hf je spojitá na $\overline{U(0, 1)}$ (a také harmonická na $U(0, 1)$ a na \mathbb{T} rovna f).

Věta 6 (vyjádření harmonické funkce Poissonovým integrálem). Necht' f je komplexní funkce spojitá na $\overline{U(0, 1)}$, harmonická na $U(0, 1)$. Pak $f = P[f|_{\mathbb{T}}]$ na $U(0, 1)$.

Důsledek.

- Je-li f komplexní funkce spojitá na $\overline{U(a, R)}$ a harmonická na $U(a, R)$, pak platí pro $r \in [0, R)$ a $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - t) + r^2} f(a + Re^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) \cdot \operatorname{Re} \frac{Re^{it} + re^{i\theta}}{Re^{it} - re^{i\theta}} dt.$$

- Reálná harmonická funkce na $U(a, R)$ je reálnou částí holomorfní funkce na $U(a, R)$.
- Harmonické funkce jsou třídy C^∞ .
- Necht' funkce f je spojitá na $\overline{U(a, R)}$ a harmonická na $U(a, R)$. Pak $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it}) dt.$

Věta 7 (Harnackova). Necht' $G \subset \mathbb{R}^2$ je oblast a (f_n) posloupnost harmonických funkcí na G .

- Jestliže posloupnost (f_n) konverguje lokálně stejnoměrně na G , pak limita je harmonická na G .
- Necht' funkce f_n jsou reálné a posloupnost $(f_n(z))$ je neklesající pro každé $z \in G$. Pak buď posloupnost f_n konverguje lokálně stejnoměrně na G nebo $f_n(z) \rightarrow +\infty$ pro každé $z \in G$.

Definice. Necht' $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená a f je spojitá na G . Řekneme, že f má **vlastnost průměru**, jestliže pro každé $a \in G$ existuje posloupnost $r_n \searrow 0$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + r_n e^{it}) dt.$$

Věta 8. Necht' $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, f je spojitá na G a má vlastnost průměru. Pak f je harmonická na G .

Věta 9 (Schwarzův princip zrcadlení). Necht' $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, která je symetrická podle reálné osy a její průnik s reálnou osou je otevřený interval I . Označme Ω^+ průnik Ω s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ a Ω^- průnik s polorovinou $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Necht' f je holomorfní na Ω^+ a pro každé $x \in I$ je

$$\lim_{z \rightarrow x, z \in \Omega^+} \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

Pak existuje $F \in H(\Omega)$ taková, že $F = f$ na Ω^+ . F navíc splňuje podmínku $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$ pro $z \in \Omega$.