III.4 Hartogsova věta o oddělené holomorfnosti

Značení: Symbolem λ budeme značit $2n$-rozměrnou Lebesgueovu míru v $\mathbb{C}^n$.

Věta 15 (Jensenova nerovnost). *Nechť f je funkce holomorfní na otevřené množině obsahující $\overline{\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})}$, kde $\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ je polydisk v $\mathbb{C}^n$. Pak platí*

$$\log|f(\boldsymbol{x})| \leq \frac{1}{\lambda(\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}))} \int_{\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})} \log|f(\boldsymbol{y})| \,\mathrm{d}\lambda(\boldsymbol{y}).$$

Značení: Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ píšeme $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}', x_n)$, kde $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{C}^{n-1}$ a $x_n \in \mathbb{C}$.

Lemma 16 (Hartogsovo lemma). *Nechť f je funkce holomorfní na polydisku $\mathbb{P}(0,\boldsymbol{r})$ a pro $\boldsymbol{z} \in \mathbb{P}(0,\boldsymbol{r})$ platí*

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\boldsymbol{z}') \cdot z_n^k,$$

kde funkce f_k jsou holomorfní na $\mathbb{P}(0,\boldsymbol{r}')$. Předpokládejme, že existuje takové $c > r_n$, že uvedená řada konverguje bodově na $\mathbb{P}(0,\boldsymbol{r}') \times U(0,c)$. Pak řada konverguje na této množině lokálně stejnoměrně.

Věta 17 (Hartogsova věta). *Každá odděleně holomorfní funkce je holomorfní.*