II.3 Něco málo o Riemannových plochách

Definice. **Riemannovou plochou** rozumíme souvislou holomorfní varietu dimenze 1, tj. souvislý Hausdorffův topologický prostor X, na němž je dán **holomorfní atlas**, tj. systém $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ s vlastnostmi:

- Pro každé $\lambda \in \Lambda$ je U_λ otevřená podmnožina prostoru X;
- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$;
- pro každé $\lambda \in \Lambda$ je φ_λ homeomorfismus množiny U_λ na nějakou otevřenou podmnožinu $\mathbb{C}$;
- kdykoli $\lambda, \mu \in \Lambda$ jsou takové, že $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, pak zobrazení $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$ je holomorfní na množině $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu)$.

Dvojice $(U_\lambda, \varphi_\lambda)$, které jsou prvky atlasu, se nazývají **mapy**.

Poznámky.

(1) Každá oblast v $\mathbb{C}$ je Riemannova plocha. (Atlas obsahuje jedinou mapu, příslušná funkce je identita.)

(2) $\overline{\mathbb{C}}$ je Riemannova plocha. Atlas tvoří například dvojice map $(\mathbb{C}, z \mapsto z)$ a $(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, z \mapsto \frac{1}{z})$.

(3) Otevřená souvislá podmnožina Riemannovy plochy je Riemannova plocha (s přirozeným atlasem).

(4) Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že pro každou mapu (U, φ) je $\varphi(U)$ otevřený kruh.

Definice. Nechť X a Y jsou Riemannovy plochy a $\Omega \subset X$ je otevřená podmnožina.

- Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazývá **holomorfní**, pokud pro každou mapu (U, φ) splňující $U \subset \Omega$ je $f \circ \varphi^{-1}$ holomorfní na $\varphi(U)$.
- Zobrazení $f : \Omega \to Y$ se nazývá **holomorfní**, pokud je spojité a pro každou mapu (U, φ) na X a každou mapu (V, ψ) na Y je $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorfní na $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ (pokud je tato množina neprázdná).
- Zobrazení $f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, pokud pro každou mapu (U, φ) splňující $U \subset \Omega$ je $f \circ \varphi^{-1}$ meromorfní na $\varphi(U)$.

Věta 7 (vlastnosti holomorfních zobrazení mezi Riemannovými plochami).

(1) *Nechť X je Riemannova plocha a f, g jsou holomorfní zobrazení X do $\mathbb{C}$. Pak funkce $f + g$ a fg jsou také holomorfní. Pokud g nenabývá nuly, je i funkce f/g holomorfní.*

(2) *Nechť X, Y a Z jsou Riemannovy plochy, $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou holomorfní zobrazení. Pak je i zobrazení $g \circ f$ holomorfní.*

(3) *Nechť X a Y jsou Riemannovy plochy. Nechť $f : X \to Y$ a $g : X \to Y$ jsou holomorfní. Pokud má množina $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ hromadný bod v X, pak $f = g$ na X.*

(4) *Nechť X je Riemannova plocha a $f : X \to \mathbb{C}$ nekonstantní holomorfní zobrazení. Pak $|f|$ nenabývá na X lokálního maxima.*

Důsledek. *Nechť X je kompaktní Riemannova plocha. Pak každá holomorfní funkce $f : X \to \mathbb{C}$ je konstantní.*

Poznámky:

(1) Na každé Riemannově ploše existuje nekonstantní meromorfní funkce.

(2) Na každé nekompaktní Riemannově ploše existuje nekonstantní holomorfní funkce.

Riemannova plocha analytické funkce

Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω. Pak jí přísluší následující Riemannova plocha a holomorfní funkce na ní:

- Množina X je množina všech tříd ekvivalence při ekvivalenci „být stejnými elementy“ definované na $\boldsymbol{f}$.
- Topologie na X: Nechť $\boldsymbol{x} \in X$. Nechť $(f, D) \in \boldsymbol{x}$ a z_0 nechť je střed kruhu D. Pro každé $r > 0$ definujme

$$U(\boldsymbol{x}, r) = \{\boldsymbol{y} \in X : \exists (g, U(z, \delta)) \in \boldsymbol{y} : |z - z_0| < r \\ \& \ (g, U(z, \delta)) \text{ je přímým pokračováním } (f, D)\}.$$

  Systém $U(\boldsymbol{x}, r)$, $r > 0$, pak bude tvořit bázi okolí $\boldsymbol{x}$ v X.
- Atlas na X tvoří mapy $(U(\boldsymbol{x}, r), \varphi)$ pro $\boldsymbol{x} \in X$ a $r > 0$, kde

$$\varphi : \boldsymbol{y} \mapsto \text{ střed kruhu } D, \text{ kde } (D, f) \in \boldsymbol{y}.$$

Uvažme dále funkci $F : X \to \mathbb{C}$ definovanou předpisem

$$F(\boldsymbol{x}) = f(z), \text{ pokud } (f, D) \in \boldsymbol{x} \text{ a } z \text{ je středem kruhu } D.$$

Pak F je holomorfní na X.