III.1 Mocninné řady více komplexních proměnných

Značení:

- Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ a $c \in \mathbb{C}$. Pak značíme
  - $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
  - $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$,
  - $c\boldsymbol{x} = (cx_1, \ldots, cx_n)$.
- Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Pak značíme $\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, přičemž používáme konvenci $0^0 = 1$.
- Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, pak značíme $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Definice. **Mocninnou řadou n proměnných o středu 0** rozumíme řadu

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha,$$

kde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Poznámka: Uvedenou řadu chápeme ve smyslu tzv. zobecněných řad, tedy její konvergencí se rozumí absolutní konvergence. Tedy mocninná řada uvedeného tvaru konverguje v bodě $\boldsymbol{x}$, právě když

$$\sup\{\sum_{\alpha \in F} |c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha| : F \subset \mathbb{N}_0^n \text{ konečná}\} < +\infty.$$

Součet řady je pak limita částečných součtů pro libovolné uspořádání členů do posloupnosti, nebo ekvivalentně limita netu

$$\sum_{\alpha \in F} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha, \qquad F \subset \mathbb{N}_0^n \text{ konečná},$$

kde konečné množiny jsou uspořádany inkluzí.

Větička 1.

(1) *Řada $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \boldsymbol{x}^\alpha$ konverguje, právě když $|x_j| < 1$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, n\}$.*

(2) *Uvažme řadu $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ je takové, že má všechny souřadnice nenulové a*

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha| < +\infty.$$

Pak řada konverguje lokálně stejnoměrně na množině

$$\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n : |y_j| < |x_j| \text{ pro } j = 1, \ldots, n\}.$$

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{C}^n$. Množina A se nazývá

- **Reinhardtova**, pokud pro každé $\boldsymbol{x} \in A$ a každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{T}^n$ platí $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \in A$,
- **úplná Reinhardtova**, pokud pro každé $\boldsymbol{x} \in A$ a každé $\boldsymbol{y} \in \overline{\mathbb{D}}^n$ platí $\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \in A$.

Reinhardtova množina A se nazývá **logaritmicky konvexní**, jestliže množina

$$\log A = \{(\log |x_1|, \ldots, \log |x_n|) : \boldsymbol{x} \in A \cap (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n\}$$

je konvexní v $\mathbb{R}^n$.

Větička 2. *Nechť $A \subset \mathbb{C}^n$ je úplná Reinhardtova množina, která obsahuje alespoň jeden bod se všemi souřadnicemi nenulovými. Pak platí:*

$$0 \in \operatorname{Int} A, \qquad \operatorname{Int} A = \operatorname{Int} \overline{A}.$$

Navíc, pokud $\boldsymbol{x} \in \overline{A}$ má všechny souřadnice nenulové, pak $x \in \overline{\operatorname{Int} A}$.

Věta 3. *Nechť S je mocninná řada výše uvedeného tvaru. Uvažme následující množiny*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_S &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C} : \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha x^\alpha| < +\infty\} \\
\mathcal{C}_S &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha x^\alpha| < +\infty\} \\
\mathcal{D}_S &= \operatorname{Int} \mathcal{B}_S.
\end{aligned}$$

Pak platí

$$\mathcal{D}_S \subset \mathcal{C}_S \subset \mathcal{B}_S.$$

Všechny tyto množiny jsou úplné Reinhardtovy, množiny $\mathcal{B}_S$ a $\mathcal{D}_S$ jsou navíc logaritmicky konvexní. Řada S navíc konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathcal{D}_S$.

Definice. Množina $\mathcal{D}_S$ se nazývá **oblast konvergence** řady S.

Věta 4. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je logaritmicky konvexní úplná Reinhardtova oblast. Pak existuje mocninná řada, jejíž oblastí konvergence je Ω.*

Věta 5. *Pro řady*

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha \qquad a \qquad S' = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \alpha_j \geq 1} \alpha_j c_\alpha \boldsymbol{x}^{\alpha - \boldsymbol{e}^j}$$

platí $\mathcal{D}_S \subset \mathcal{D}_{S'}$. Přitom symbolem $\boldsymbol{e}^j$ značíme j-tý kanonický vektor, tedy

$$\boldsymbol{e}^j = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{| \\ j\text{-té místo}}}{1}, 0, \ldots, 0).$$