III.2 Holomorfní funkce více komplexních proměnných

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkce f se nazývá

- **holomorfní na** Ω, jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ existují koeficienty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takové, že pro $\boldsymbol{y}$ z nějakého okolí bodu $\boldsymbol{x}$ platí

$$f(\boldsymbol{y}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^\alpha .$$

- **odděleně holomorfní na** Ω, jestliže pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a každou volbu $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ je funkce

$$z \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

  holomorfní na svém definičním oboru.

Poznámka. Funkce f je odděleně holomorfní na Ω, právě když má v každém bodě množiny Ω parciální derivace podle všech proměnných.

Definice. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou separabilní metrické prostory a Y nechť je metrický prostor. Funkce $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{C}$ se nazývá **odděleně spojitá**, jestliže jestliže pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a každou volbu $x_k \in X_k$, $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ je funkce

$$x \mapsto f(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

spojitá na X_j.

Lemma 6.

(1) *Nechť X, Y, Z jsou metrické prostory, přičemž prostor X je separabilní. Nechť $f : X \times Y \to Z$ splňuje podmínky*
   - *Pro každé $y \in Y$ je zobrazení $x \mapsto f(x, y)$ spojité na X.*
   - *Pro každé $x \in X$ je zobrazení $y \mapsto f(x, y)$ borelovsky měřitelné na Y.*

   Pak f je borelovsky měřitelné na $X \times Y$.

(2) *Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou separabilní metrické prostory, Z metrický prostor a $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Z$ odděleně spojité zobrazení. Pak f je borelovsky měřitelné.*

Značení: Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ a $\boldsymbol{r} \in (0, +\infty)^n$. Pak značíme

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \prod_{j=1}^{n} U(x_j, r_j).$$

Množiny tohoto tvaru nazýváme **polydisk**.

Lemma 7. *Nechť f je odděleně holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Nechť $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a $\boldsymbol{r} \in (0, +\infty)^n$ splňují $\overline{\mathbb{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})} \subset \Omega$. Pak pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})$ platí*

$$f(\boldsymbol{y}) = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \int_0^{2\pi} \left(\cdots \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \tfrac{f(x_1+r_1e^{it_1}, x_2+r_2e^{it_2}, \ldots, x_n+r_ne^{it_n})}{(x_1+r_1e^{it_1}-y_1)(x_2+r_2e^{it_2}-y_2)\cdots(x_n+r_ne^{it_n}-y_n)} \cdot r_1 \cdots r_n \cdot i^n \cdot e^{i(t_1+\cdots+t_n)} \,\mathrm{d}t_1 \right) \mathrm{d}t_2 \ldots \right) \mathrm{d}t_n$$

Věta 8. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ funkce. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(1) *f je holomorfní na Ω.*
(2) *f má v každém bodě Ω Fréchetovu derivaci (tj. totální diferenciál).*
(3) *f je odděleně holomorfní a lokálně omezená na Ω.*
(4) *Pro každý polydisk $\mathbb{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})$, jehož uzávěr je obsažen v Ω, platí, že f je omezená na kartézském součinu příslušných kružnic a pro každé $\boldsymbol{y} \in \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r})$ platí vzorec*

$$f(\boldsymbol{y}) = \tfrac{1}{(2\pi i)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \tfrac{f(x_1+r_1e^{it_1}, x_2+r_2e^{it_2}, \ldots, x_n+r_ne^{it_n})}{(x_1+r_1e^{it_1}-y_1)(x_2+r_2e^{it_2}-y_2)\cdots(x_n+r_ne^{it_n}-y_n)} \cdot r_1 \cdots r_n \cdot i^n \cdot e^{i(t_1+\cdots+t_n)} \,\mathrm{d}t_1 \,\mathrm{d}t_2 \ldots \mathrm{d}t_n$$

Poznámka. Dokonce platí, že každá odděleně holomorfní funkce je již holomorfní. To říká Hartogsova věta, které se budeme věnovat později.

Věta 9. *Nechť f je holomorfní funkce na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ je funkce $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} f$ holomorfní na Ω.*

Věta 10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je otevřená množina a (f_n) je posloupnost holomorfních funkcí na Ω, která konverguje k nějaké funkci f lokálně stejnoměrně na Ω. Pak f je také holomorfní na Ω a navíc pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ funkce $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} f_n$ konvergují k funkci $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} f$ lokálně stejnoměrně na Ω.*