$\mathcal{M}(K,\mathbb{F})$ = regulární borelovské $\mathbb{F}$-hodnotové míry na K

(K je kompaktní metrický prostor, nebo obecněji Hausdorffův topologický kompaktní prostor)

$\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{F})$ ... $\|\mu\| = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)| : B_1,\dots,B_n \subset K \text{ borelovské po dvou disjunktní} \right\}$

Prop. $\|\mu\|$ definuje normu na $\mathcal{M}(K,\mathbb{F})$

[$\|\mu\| \geq 0$ ... jasné

$\|\mu\| = 0 \Rightarrow \forall B \subset K$ borelovskou platí $\mu(B) = 0 \Rightarrow \mu = 0$

$\|\lambda\mu\| = |\lambda|\,\|\mu\|$ ... snadné

$\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$

$B_1,\dots,B_n \subset K$ disjunktní borelovské

$$\sum_{j=1}^{n} |(\mu_1+\mu_2)(B_j)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\mu_1(B_j)| + \sum_{j=1}^{n} |\mu_2(B_j)| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

$\Rightarrow \|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$]

Úplnost dokážeme ve třech krocích.

$\mathcal{B}$:= σ-algebra borelovských podmnožin K

<u>1. krok:</u> $X_1 := \left\{ g : \mathcal{B} \to \mathbb{F} : \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |g(B_j)| : B_1,\dots,B_n \subset K \text{ borelovské po 2 disjunktní} \right\} < \infty \right\}$

Prop. $X_1 \subset \ell^\infty(\mathcal{B})$

$$\left[\, B \in \mathcal{B} \Rightarrow |g(B)| \leq \sup\{\dots\} \,\right] \quad (*)$$

$\phi : \ell^\infty(\mathcal{B}) \to [0,\infty]$

$$\phi(g) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} |g(B_j)| : B_1,\dots,B_n \subset K \text{ borel., po 2 disj.} \right\}$$

Prop. ϕ splňuje předpoklady Větičky I.5

[(a) ... splňuje axiomy normy ... podobně jako výše, kde se ukázalo, že $\|\cdot\|$ je norma na $\mathcal{M}(K,\mathbb{F})$

(b) $\|g\|_\infty \leq \phi(g)$ plyne z $(*)$

(c) ϕ je zdola polospojitý:

Nech $\phi(g) > C$. Zvolme $\varepsilon > 0$, aby $\phi(g) > C + \varepsilon$

Z definice ϕ plyne existence $B_1, \dots, B_n \subset K$ borelovských disjunktních, že $\sum_{j=1}^{n} |g(B_j)| > C + \varepsilon$

Pokud vezmu $h \in \ell^\infty(\mathcal{B})$, $\|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n}$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} |h(B_j)| \geq \sum_{j=1}^{n} |g(B_j)| - \sum_{j=1}^{n} |g(B_j) - h(B_j)|$$

$$> C + \varepsilon - n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = C \quad \}$$

Tedy z Věty 5 plyne, že (X_1, ϕ) je Banachův prostor.

2. krok $X_2 = \{ g \in X_1,\ g$ je σ-aditivní, tj. $\forall (B_j)_{j=1}^{\infty}$ posloupnost disjunktních borelovských množin:

$$g\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} g(B_j) \}$$

Pozn: ta řada nutně konverguje absolutně, protože konverguje při každém přerovnání.

Pak X_2 je uzavřený podprostor X_1:

- $(g_n) \subset X_2$, $g_n \longrightarrow g \in X_1$ v normě prostoru X_1 $\Longrightarrow g \in X_2$

Buď $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ disjunktní posloupnost borelovských množin, $B := \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ g_n(B) = \sum_{j=1}^{\infty} g_n(B_j)$$

$$g_n \to g \text{ v } X_1 \Rightarrow g_n(B) \to g(B)$$

$$g \in X_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |g(B_j)| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} |g(B_j)| \leq \phi(g)$$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} g(B_j)$ konverguje absolutně

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} g_n(B_j) - \sum_{j=1}^{\infty} g(B_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |g_n(B_j) - g(B_j)| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k} |g_n(B_j) - g(B_j)| \leq$$

$$\leq \phi(g_n - g) \to 0$$

3. krok X_2 jsou borelovské $\mathbb{F}$-hodnotové míry, $M(K,\mathbb{F})$ je podprostor X_2 tvořený regulárními mírami. Zbývá ukázat, že $M(K,\mathbb{F})$ je uzavřený v X_2

$\mu \in X_2 \setminus M(K,\mathbb{F}) \Rightarrow \mu$ není regulární

Tedy existuje $B \subset K$ borelovská a $\varepsilon > 0$ tak, že pro každou $U \supset B$ otevřenou platí $|\mu|(U \setminus B) > \varepsilon$

$\nu \in X_2$, $\|\nu - \mu\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$U \supset B$ otevřená $\Rightarrow |\mu|(U \setminus B) > \varepsilon \Rightarrow$ ex. $C_1, \dots, C_n \subset U \setminus B$ borelovské disjunktní, že $\sum_{j=1}^{n} |\mu(C_j)| > \varepsilon$

Pak
$$\sum_{j=1}^{n} |\nu(C_j)| \geq \sum_{j=1}^{n} |\mu(C_j)| - \sum_{j=1}^{n} |\nu(C_j) - \mu(C_j)|$$
$$> \varepsilon - \|\nu - \mu\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \nu$ není regulární

[Zde píšeme $\|\cdot\| = \Phi$.]