Nechť X je Banachův prostor

(a) X je reflexivní $\Leftrightarrow$ X^* je reflexivní

<u>Důkaz:</u> $\Rightarrow$: Nechť X je reflexivní. Nechť $\Phi \in X^{***}$ je libovolné.

Označme $\varphi := \Phi \circ \varkappa_X$, tj. $\varphi(x) = \Phi(\varkappa_X(x))$, $x \in X$.

Pak $\varphi \in X^*$. Tvrdím, že $\Phi = \varkappa_{X^*}(\varphi)$

$\ulcorner$ $F \in X^{**} \Rightarrow$ ex. $x \in X$, že $F = \varkappa_X(x)$. (protože X je reflexivní)

Pak $\varkappa_{X^*}(\varphi)(F) = F(\varphi) = \varkappa_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$
$= \Phi(\varkappa_X(x)) = \Phi(F)$. $\perp$

$\Leftarrow$ Nechť X^* je reflexivní. Ukážeme, že $\varkappa_X(X)$ je hustý v X^{**}. Z úplnosti X pak plyne $\varkappa_X(X) = X^{**}$.

Hustotu ukážeme pomocí Důsledku II.9, tj. důkazem implikace $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\varkappa_X(X)} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$

$\ulcorner$ Nechť $\Phi \in X^{***}$, $\Phi|_{\varkappa_X(X)} = 0$.

Protože X^* je reflexivní, existuje $\varphi \in X^*$, že $\varkappa_{X^*}(\varphi) = \Phi$

Pro každé $x \in X$ platí:

$0 = \Phi(\varkappa_X(x)) = \varkappa_{X^*}(\varphi)(\varkappa_X(x)) = \varkappa_X(x)(\varphi) = \varphi(x)$,

tj. $\varphi = 0$, tedy i $\Phi = \varkappa_{X^*}(\varphi) = \varkappa_{X^*}(0) = 0$ $\perp$

(b1) X reflexivní, $Y \subset\subset X$ uzavřený $\Rightarrow$ X/Y reflexivní

<u>Důkaz:</u> Nechť $F \in (X/Y)^{**}$.

Označme $q: X \to X/Y$ kanonické kvocientové zobrazení a $T: (X/Y)^* \to X^*$ definujme vzorcem $T\varphi = \varphi \circ q$. Dle Věty II.14(a) je T izometrie $(X/Y)^*$ na $Y^\perp \subset X^*$.

F je funkcionál na $(X/Y)^*$, tedy $F_0 := F \circ T^{-1} \in (Y^\perp)^*$

Z H-B věty plyne existence $G_0 \in X^{**}$, že $G_0|_{Y^\perp} = F_0$

X reflexivní $\Rightarrow$ ex. $x \in X$, že $G_0 = \varkappa_X(x)$.

Tvrdím, že $F = \varkappa_{X/Y}(q(x))$

⌈ $g \in (X/Y)^* \Rightarrow$

$$\varkappa_{X/Y}(q(x))(g) = g(q(x)) = T(g)(x) = \varkappa_X(x)(T(g)) =$$

$$= G_0(T(g)) \underset{\substack{\uparrow \\ T(g) \in Y^\perp}}{=} F_0(T(g)) = F(g).$$ ⌋

(b2) X reflexivní, $Y \subset\subset X$ uzavřený $\Rightarrow$ Y reflexivní

Důkaz: Dle (a) stačí ukázat, že Y^* je reflexivní.
Přitom Y^* je dle Věty II.14(3) izometricky $X^*/Y^\perp$.
X^* je reflexivní dle (a), $X^*/Y^\perp$ je reflexivní dle (b1).

(c) X reflexivní, Y izomorfní X $\Rightarrow$ Y reflexivní

Důkaz: Nechť $T : X \to Y$ je izomorfismus na.

$y^{**} \in Y^{**} \Rightarrow$ definujme $x^{**}(x^*) = y^{**}(x^* \circ T^{-1})$, $x^* \in X^*$

Pak $x^{**} \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$,
že $\varkappa_X(x) = x^{**}$. Tvrdím, že pak $y^{**} = \varkappa_Y(Tx)$

⌈ $y^* \in Y^* \Rightarrow$

$$\varkappa_Y(Tx)(y^*) = y^*(Tx) = (y^* \circ T)(x) = \varkappa_X(x)(y^* \circ T)$$

$$= x^{**}(y^* \circ T) = y^{**}(y^*).$$ ⌋