Důkaz Věty II.21. (duály z $\ell^p(\Gamma)$ a $c_0(\Gamma)$).

1. krok Φ_g je dobře definovaný (tj. ona řada konverguje), Φ_g je lineární funkcionál, $\|\Phi_g\| \le \|g\|$

(a) $\forall F \subset \Gamma$ konečnou platí

$$\sum_{\gamma\in F} |f(\gamma)\, g(\gamma)| \le \left(\sum_{\gamma\in F} |f(\gamma)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\gamma\in F} |g(\gamma)|^q\right)^{1/q} \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

$\uparrow$ Hölderova nerovnost

Tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma) g(\gamma)| \le \|f\|_p \|g\|_q$ (přechodem k supremu)

$\Rightarrow$ řada konverguje absolutně, tedy konverguje (Tvrzení I.29 (b))

$\Rightarrow \Phi_g$ je dobře definovaný, linearita Φ_g je zřejmá,

$$|\Phi_g(f)| = \left|\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) g(\gamma)\right| \le \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma) g(\gamma)| \le \|f\|_p \|g\|_q$$

tj. $\|\Phi_g\| \le \|g\|_q$

(b) $\forall F \subset \Gamma$ konečnou platí

$$\sum_{\gamma\in F} |f(\gamma) g(\gamma)| \le \max_{\gamma\in F} |g(\gamma)| \cdot \sum_{\gamma\in F} |f(\gamma)| \le \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

$$\Rightarrow \sum_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma) g(\gamma)| \le \|g\|_\infty \cdot \|f\|_1$$

Dále stejně jako v (a): Φ_g je dobře def. lin. funkcionál na $\ell_1(\Gamma)$

$\|\Phi_g\| \le \|g\|_\infty$

(c) Ukáže se stejně jako (b), jen se prohodí role f a g.

2. krok $\|\Phi_g\| = \|g\|$, tedy Φ je lineární izometrie do.

• Linearita Φ je zřejmá, dle 1. kroku stačí ukázat $\|\Phi_g\| \geq \|g\|$

(a) $g \in \ell^q(\Gamma)$ dáno.

Definujme
$$f(\gamma) = \begin{cases} 0 & , \text{pokud } g(\gamma) = 0 \\ \dfrac{|g(\gamma)|^q}{g(\gamma) \cdot \|g\|_q^{q-1}} & , \text{pokud } g(\gamma) \neq 0 \end{cases}$$

• Pokud $g = 0$, pak zřejmě $\Phi_g = 0$, tedy $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$

• $g \neq 0 \Rightarrow$
$$\|f\|_p^p = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ g(\gamma) \neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^{pq}}{|g(\gamma)|^p \, \|g\|_q^{p(q-1)}} = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ g(\gamma) \neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^{p(q-1)}}{\|g\|_q^{p(q-1)}} =$$

$$\left[p(q-1) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q}}\right) \cdot (q-1) = q \right]$$

$$= \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ g(\gamma) \neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^q}{\|g\|_q^q} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_p = 1$$

$$\Phi_g(f) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma \\ g(\gamma) \neq 0}} \frac{|g(\gamma)|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q$$

$\Rightarrow \|\Phi_g\| \geq \|g\|_q$

(b) $g \in \ell^\infty(\Gamma)$ dáno. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\gamma \in \Gamma$: $|g(\gamma)| > \|g\|_\infty - \varepsilon$

Pak $e_\gamma \in \ell_1(\Gamma)$, $\|e_\gamma\|_1 = 1$, $|\Phi_g(e_\gamma)| = |g(\gamma)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$

Tedy $\|\Phi_g\| \geq \|g\|_\infty$

(c) $g \in \ell^1(\Gamma)$ dáno. Pokud $g = 0$, je to jasné. Pokud $g \neq 0$, zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $F \subset \Gamma$ konečná, že $\sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)| > \|g\|_1 - \varepsilon$.

Definujme
$$f(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{|g(\gamma)|}{g(\gamma)} & , \gamma \in F, g(\gamma) \neq 0 \\ 0 & , \text{jinak} \end{cases}$$

Pak $f \in c_0(\Gamma)$, $\|f\| = 1$ (přesněji $\|f\| \leq 1$, může být 0, pro ε velké)

$$\Phi_g(f) = \sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)| > \|g\|_1 - \varepsilon$$

Tedy $\|\Phi_g\| \geq \|g\|_1$

3. krok: Φ je na

(a) $\varphi \in (\ell^p(\Gamma))^*$ ... definujme $g(\gamma) = \varphi(e_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Tvrdím, že $g \in \ell^q(\Gamma)$, $\varphi = \Phi_g$

$\ulcorner$ $F \subset \Gamma$ konečná

$\Rightarrow$ pro $f \in \ell^p(F)$ nechť $\tilde{f}(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & \gamma \in F \\ 0 & \gamma \in \Gamma \setminus F \end{cases}$ $\Rightarrow \tilde{f} \in \ell^p(\Gamma)$, $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$

Definujme $\varphi_F : \ell^p(F) \to \mathbb{F}$ předpisem

$$\varphi_F(f) = \varphi(\tilde{f}), \quad f \in \ell^p(F)$$

Pak $\varphi_F(f) = \sum_{\gamma \in F} f(\gamma) g(\gamma)$ (z linearity), tedy z kroku 1 a 2

aplikovaných na $\ell^p(F)$ plyne, že

$$\|\varphi_F\| = \Big(\sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)|^q\Big)^{1/q}$$

Protože $\|\varphi_F\| \le \|\varphi\|$, dostáváme $\Big(\sum_{\gamma \in F} |g(\gamma)|^q\Big)^{1/q} \le \|\varphi\|$

Protože to platí pro každou $F \subset \Gamma$ konečnou, dostáváme

$\Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} |g(\gamma)|^q\Big)^{1/q} \le \|\varphi\|$, tj. $g \in \ell^q(\Gamma)$, $\|g\|_q \le \|\varphi\|$

Tedy dle kroku 1 je $\Phi_g \in \ell^p(\Gamma)^*$. Z linearity plyne, že $\Phi_g(f) = \varphi(f)$ pro ty f, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto prvky jsou husté v $\ell^p(\Gamma)$, tedy $\Phi_g = \varphi$. $\lrcorner$

(b) a (c) se dokáže zcela analogicky.

Důkaz důsledku 22 (pro $p \in (1,\infty)$ je $\ell^p(\Gamma)$ reflexivní)

$p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $\Phi : \ell^q(\Gamma) \to (\ell^p(\Gamma))^*$ z Věty 21 (a)

$\xi \in \ell^p(\Gamma)^{**} \Rightarrow \xi \circ \Phi \in (\ell^q(\Gamma))^* \Rightarrow$ z Věty 21(a) aplikované na q

existuje $g \in \ell^p(\Gamma)$, že pro $f \in \ell^q(\Gamma)$ je $(\xi \circ \Phi)(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) g(\gamma)$

Tj. $\xi(\Phi_f) = \Phi_f(g)$, $f \in \ell^q(\Gamma)$

$$\Rightarrow \xi = \varkappa(g).$$