K kompaktní metrický prostor (kompaktní Hausdorffův topologický).

(a) $F \subset K$ uzavřená, $U \subset K$ otevřená, $F \subset U \Rightarrow \exists\, V \subset K$ otevřená: $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$

Dk. 1 (využívá metriku, nikoli kompaktnost). Nechť d je metrika na K.

Pokud $F = \emptyset$, pak $V = \emptyset$

Pokud $U = K$, pak $V = K$

Předpokládejme, že $F \neq \emptyset$ a $U \subsetneq K$.

Funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$ a $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus U)$ jsou spojité na K (dokonce 1-lipschitzovské)

Tedy $V := \{x \in K : \operatorname{dist}(x, F) < \operatorname{dist}(x, K \setminus U)\}$ je otevřená

$H := \{x \in K : \operatorname{dist}(x, F) \leq \operatorname{dist}(x, K \setminus U)\}$ je uzavřená

Navíc $F \subset V \subset H \subset U$

[$x \in F \Rightarrow \operatorname{dist}(x, F) = 0$, $\operatorname{dist}(x, K \setminus U) > 0$

$x \in K \setminus U \Rightarrow \operatorname{dist}(x, K \setminus U) = 0$, $\operatorname{dist}(x, F) > 0$]

Tedy $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$

Dk. 2 (využívá kompaktnost, nikoli metriku)

Opět stačí uvažovat jen $F \neq \emptyset$, $U \subsetneq K$

1. krok F je 1 bod, tj. $F = \{x\}$

pro každé $y \in K \setminus U$ ex. V_y otevřené okolí x, W_y otevřené okolí y, že $V_y \cap W_y = \emptyset$

W_y, $y \in K \setminus U$ je otevřené pokrytí $K \setminus U$. $K \setminus U$ je kompaktní, tedy existují $y_1, \dots, y_n \in K \setminus U$, že $K \setminus U \subset W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$.

Položme $W := W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$, $V := V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}$

Pak V, W jsou otevřené, $W \cap V = \emptyset$, $x \in V$, $K \setminus U \subset W$

Tedy $x \in V \subset K \setminus W \subset U$, $K \setminus W$ uzavřená $\Rightarrow x \in V \subset \overline{V} \subset U$

2. krok F obecná: Dle 1. kroku pro každé $x \in F$ ex. V_x otevřená, že $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U$

V_x, $x \in F$, je otevřené pokrytí F, F je kompaktní $\Rightarrow$ ex. $x_1, \dots, x_n \in F$: $F \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$

Nechť $V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Pak V je otevřená, $F \subset V \subset \overline{V}$

a $\overline{V} = \overline{V_{x_1}} \cup \dots \cup \overline{V_{x_n}} \subset U$.

(b) $F \subset K$ uzavřená, $U \subset K$ otevřená, $F \subset U$ $\Rightarrow$ $\exists f: K \to [0,1]$ spojitá, že $f \restriction_F = 1$ a $\operatorname{spt} f \subset U$

Γ Nechť $V \subset K$ je otevřená, $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$, dle (a).

S použitím metriky, ne kompaktnosti: $\quad f(x) := \dfrac{\operatorname{dist}(x, K \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, K \setminus V)}$

Pak f je spojitá a nabývá hodnot z $[0,1]$

$x \in F \Rightarrow \operatorname{dist}(x, F) = 0$, $\operatorname{dist}(x, K \setminus V) > 0 \Rightarrow f(x) = 1$

$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in V \Rightarrow \operatorname{spt} f \subset \overline{V} \subset U$

S použitím kompaktnosti, ne metriky:

Podle Urysohnova lemmatu z obecné topologie ~~platí~~ existuje $f: K \to [0,1]$ spojitá, že

$$f \restriction_F = 1, \quad f \restriction_{K \setminus V} = 0.$$

(protože F a $K \setminus V$ jsou disjunktní uzavřené množiny a dle (a) je K normální)

Pak zřejmě $\operatorname{spt} f \subset \overline{V} \subset U$

(c) $U_1,\dots,U_n \subset K$ otevřené, $U_1\cup\dots\cup U_n = K$

$\Rightarrow$ existují $f_1,\dots,f_n : K\to[0,1]$ spojité, že $\sum_{j=1}^{n} f_j = 1$

a pro každé $j\in\{1,\dots,n\}$ platí $\operatorname{spt} f_j \subset U_j$

Dk: Postupně zkonstruujeme $F_1,\dots,F_n$, $g_1,\dots,g_n$, $V_1,\dots,V_n$ tak, že:

(i) V_j jsou otevřené podmnožiny K a pro každé $k=1,\dots,n+1$ platí

$$\bigcup_{1\le j<k} V_j \cup \bigcup_{k\le j\le n} U_j = K$$

(ii) $F_k = K\setminus\left(\bigcup_{j<k} V_j \cup \bigcup_{j>k} U_j\right)$. Tedy F_k je uzavřená v K a $F_k\subset U_k$

(iii) $g_k : K\to[0,1]$ spojitá, $g_k|F_k = 1$, $\operatorname{spt} g_k \subset U_k$

(iv) $V_k := \{x\in K,\ g_k(x)>0\}$. Pak V_k je otevřená a $F_k\subset V_k\subset U_k$

Konstrukce lze provést indukcí (pro $k=1$ je (i) splněno, splnění (ii) plyne z (i); (iii) lze provést díky (ii) a (b)
(iv) lze provést, inkluze plynou z (iii), z nich pak plyne splnění (i) pro $k+1$

Takto máme $g_1,\dots,g_n$ spojité nezáporné funkce, $\operatorname{spt} g_k \subset U_k$,

$\sum_{k=1}^{n} g_k > 0$ na K

stačí položit $\quad f_k := \dfrac{g_k}{\sum_{j=1}^{n} g_j}$.