II.4 Reprezentace duálů klasických prostorů

Věta 19 (Riesz-Fisherova o duálu Hilbertova prostoru). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro $y \in H$ definujme zobrazení*

$$f_y(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in H.$$

Pak zobrazení $I : y \mapsto f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.

Důsledek 20.

(a) *Je-li H Hilbertův prostor, pak H^* je také Hilbertův prostor.*
(b) *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Poznámka: Nechť H je Hilbertův prostor a $I : H \to H^*$ je sdruženě lineární izometrie daná Větou 19. Pro $A \subset H$ nechť B_1 je ortogonální doplněk A v H (tj. $B_1 = A^\perp$ dle definice ze sekce I.5) a $B_2 = A^\perp$ ve smyslu definice ze sekce II.2. Pak $B_2 = I(B_1)$.

Věta 21 (duály k $\ell^p(\Gamma)$ a $c_0(\Gamma)$). *Nechť Γ je neprázdná množina.*

(a) *Nechť $p, q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pro $g \in \ell^q(\Gamma)$ definujme zobrazení Φ_g vzorcem*
$$\Phi_g(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) g(\gamma), \quad f \in \ell^p(\Gamma).$$
Pak $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ je lineární izometrie $\ell^q(\Gamma)$ na $(\ell^p(\Gamma))^*$.
(b) *Pro $g \in \ell^\infty(\Gamma)$ definujme zobrazení $\Phi_g : \ell^1(\Gamma) \to \mathbb{F}$ stejným vzorcem jako v (a). Pak Φ je lineární izometrie $\ell^\infty(\Gamma)$ na $(\ell^1(\Gamma))^*$.*
(c) *Pro $g \in \ell^1(\Gamma)$ definujme zobrazení $\Phi_g : c_0(\Gamma) \to \mathbb{F}$ stejným vzorcem jako v (a). Pak Φ je lineární izometrie $\ell^1(\Gamma)$ na $(c_0(\Gamma))^*$.*

Důsledek 22. *Je-li $p \in (1, \infty)$, pak prostor $\ell^p(\Gamma)$ je reflexivní pro každou množinu Γ. Je-li Γ nekonečná, pak prostory $c_0(\Gamma)$, $\ell^1(\Gamma)$ a $\ell^\infty(\Gamma)$ nejsou reflexivní.*

Věta 23 (duály k prostorům L^p). *Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s (nezápornou σ-aditivní) mírou.*

(a) *Nechť $p, q \in (1, \infty)$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pro $g \in L^q(\mu)$ definujme zobrazení Φ_g vzorcem*
$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f g \, \mathrm{d}\mu, \quad f \in L^p(\mu).$$
Pak $\Phi : g \mapsto \Phi_g$ je lineární izometrie $L^q(\mu)$ na $(L^p(\mu))^*$.
(b) *Je-li μ σ-konečná, pak stejným způsobem definované zobrazení Φ je lineární izometrie $L^\infty(\mu)$ na $(L^1(\mu))^*$.*

Důsledek 24. *Je-li $p \in (1, \infty)$, pak prostor $L^p(\mu)$ je reflexivní pro každou míru μ.*

Věta 25 (Rieszova o reprezentaci nezáporných funkcionálů na $\mathcal{C}(K)$). *Nechť K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor a nechť $\varphi : \mathcal{C}(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál takový, že pro každou nezápornou $f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{F})$ je $\varphi(f) \geq 0$. Pak φ je spojitý, $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1})$ (kde $\mathbf{1}$ je funkce konstantně rovna 1). Navíc existuje právě jedna nezáporná regulární borelovská míra μ na K (tj. nezáporná míra definovaná na σ-algebře borelovských podmnožin K, která pro každou borelovskou množinu $B \subset K$ splňuje*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U); U \supset B \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F); F \subset B \text{ uzavřená}\}),$$

pro kterou platí

$$\varphi(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{F}).$$

Značení: Nechť $f : K \to \mathbb{F}$ je spojitá funkce. Jejím **nosičem** rozumíme množinu

$$\operatorname{spt} f = \overline{\{x \in K; f(x) \neq 0\}}.$$

Poznámka: Míru μ z předchozí věty lze definovat následovně:

$$\mu(U) = \sup\{\varphi(f); f : K \to [0,1] \text{ spojitá}, \operatorname{spt} f \subset U\} \quad \text{pro } U \subset K \text{ otevřenou},$$
$$\mu(B) = \inf\{\mu(U); B \subset U \subset K, U \text{ otevřená}\} \quad \text{pro } B \subset K \text{ borelovskou}.$$

Je ovšem třeba dokázat, že μ je míra a má požadované vlastnosti.

Lemma 26 (některé vlastnosti kompaktních prostorů). *Nechť K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) (Normalita kompaktních prostorů) *Nechť $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$ otevřená množina a platí $F \subset U$. Pak existuje $V \subset K$ otevřená, která splňuje $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

(b) (Urysohnovo lemma) *Nechť $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$ otevřená množina a platí $F \subset U$. Pak existuje spojitá funkce $f : K \to [0,1]$ taková, že $f|_F = 1$ a $\operatorname{spt} f \subset U$.*

(c) (Rozklad jednotky) *Nechť $U_1, \dots, U_n$ jsou otevřené podmnožiny K takové, že $U_1 \cup \dots \cup U_n = K$. Pak existují nezáporné spojité funkce $f_1, \dots, f_n$ na K takové, že $\sum_{j=1}^n f_j = 1$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí $\operatorname{spt} f_i \subset U_i$.*

Věta 27 (Rieszova věta o reprezentaci duálu k $\mathcal{C}(K)$). *Nechť K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor. Pro každou míru $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{F})$ definujme zobrazení $\Phi_\mu : \mathcal{C}(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ vzorcem*

$$\Phi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{C}(K,\mathbb{F}).$$

Pak zobrazení $\mu \mapsto \Phi_\mu$ je lineární izometrie $\mathcal{M}(K,\mathbb{F})$ na $(\mathcal{C}(K,\mathbb{F}))^*$.