Důkaz Věty <u>III</u>.27 $\quad X$ Banachův, $T \in L(X)$

(a) $\varrho(T)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$:

⌈ $\lambda \in \varrho(T) \Rightarrow \quad \lambda I - T$ invertibilní

$$\|(\mu I - T) - (\lambda I - T)\| = |\mu - \lambda|$$

Tedy, dle Tvrzení III.26(b) platí:

$$|\mu - \lambda| < \|(\lambda I - T)^{-1}\| \Rightarrow (\mu I - T) \text{ invertibilní}$$

tj. $U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|) \subset \varrho(T)$ ⌋

(b) $\forall x \in X\ \forall x^* \in X^* \quad \lambda \longmapsto x^*((\lambda I - T)^{-1} x)$ je holomorfní na $\varrho(T)$

⌈ Nechť $\lambda \in \varrho(T)$. Dle (a) je $U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|) \subset \varrho(T)$ a dle T26(b) můžeme vyjádřit $(\mu I - T)^{-1}$ pro $\mu \in U(\lambda, \|(\lambda I - T)^{-1}\|)$

Spočítěme to:

do T26(b) dosadíme „T" $= (\lambda I - T)$, „S" $= (\mu I - T)$

Pak

$$\text{„}ST^{-1}\text{"} = (\mu I - T)(\lambda I - T)^{-1} = (\mu I - \lambda I + \lambda I - T)(\lambda I - T)^{-1}$$
$$= (\mu - \lambda) \cdot (\lambda I - T)^{-1} + I$$

Tj. „$I - ST^{-1}$" $= -(\mu - \lambda)(\lambda I - T)^{-1}$

Tj. $$(\mu I - T)^{-1} = (\lambda I - T)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n ((\lambda I - T)^{-1})^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mu - \lambda)^n ((\lambda I - T)^{-1})^{n+1}$$

Tedy pro $x \in X$, $x^* \in X^*$:

$$x^*((\mu I - T)^{-1} x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^*(((\lambda I - T)^{-1})^{n+1} x) \cdot (\mu - \lambda)^n,$$

což je vyjádření mocninnou řadou, je to tedy holomorfní funkce ⌋

(c) $\sigma(T)$ neprázdná kompaktní, $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$

⌈ $\sigma(T)$ uzavřená díky (a)

$\sigma(T) \subset B(0, \|T\|)$: $\quad |\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|\frac{T}{\lambda}\| < 1 \Rightarrow \underbrace{\lambda\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)}_{=\lambda I - T}$ je invertibilní díky T26(a)

Tedy $\sigma(T)$ je omezená uzavřená, tudíž kompaktní.

$\sigma(T) \neq \emptyset$: Sporem. Nechť $\sigma(T) = \emptyset$, tj. $\rho(T) = \mathbb{C}$.

Pro $|\lambda| > \|T\|$ je $(\lambda I - T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} =$

$$\overset{T26(a)}{=} \lambda^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$$

Tedy $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|T\|^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|T\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} \xrightarrow{\text{pro } |\lambda| \to \infty} 0$

Tedy pro každé $x \in X$ a $x^* \in X^*$ je

$\lambda \mapsto x^*((\lambda I - T)^{-1} x)$ funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ (díky (b)),

která má v ∞ limitu 0. Z Liouvilleovy věty (z Úvodu do komplexní analýzy) plyne, že je konstantní nulová.

Tj. $\forall x^* \, \forall x \, \forall \lambda : x^*((\lambda I - T)^{-1} x) = 0$

z H-B věty plyne $\forall x \, \forall \lambda : (\lambda I - T)^{-1} x = 0$

Tedy $\forall \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} = 0$, což je spor,

protože 0 není inverzní operátor k ničemu. ⌋