Druhá Fredholmova věta: X Banachův, $T \in K(X)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow R(\lambda I - T) = (\operatorname{Ker}(\lambda I - T'))_\perp, \quad R(\lambda I - T') = (\operatorname{Ker}(\lambda I - T))^\perp$$

Dk: označme $S := \lambda I - T$. Pak $S' = \lambda I - T'$

Dle Větičky 30(c) je $R(S)$ uzavřený

Stačí tedy ukázat: X Banachův, $S \in L(X)$, $R(S)$ uzavřený

$$\Rightarrow R(S) = (\operatorname{Ker} S')_\perp, \quad R(S') = (\operatorname{Ker} S)^\perp$$

První rovnost plyne ihned z Věty III.19, která nám říká, že $\overline{R(S)} = (\operatorname{Ker} S')_\perp$

Druhá rovnost: Provedeme faktorizaci dle Tvrzení II.12:

(označme S_0 operátor $S : X \to R(S)$ a j „identitu" $R(S) \to X$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "q"'] & R(S) \arrow[r, "j"] & X \\ X/\operatorname{Ker} S \arrow[ur, dashed, "\tilde{S}_0"'] & & \end{tikzcd}$$

q ... kanonické kvocientové zobrazení

$\tilde{S}_0$ operátor z T II.12, je prostý, je na $R(S)$

$R(S)$ uzavřený, tedy Banachův $\Rightarrow$ $\tilde{S}_0$ je izomorfismus $X/\operatorname{Ker} S$ na $R(S)$

Uvažme duální operátory:

$$\begin{tikzcd} X^* & R(S)^* \arrow[l, "S_0'"'] \arrow[dl, "\tilde{S}_0'"] & X^* \arrow[l, "j'"'] \\ (X/\operatorname{Ker} S)^* \arrow[u, "q'"] & & \end{tikzcd}$$

Pak platí: $S' = S_0' j'$,

j' je na (z H-B věty, protože $j'(x^*) = x^*|_{R(S)}$)

Tedy $R(S') = R(S_0')$

Dále, $S_0' = q' \tilde{S}_0'$, $\tilde{S}_0'$ je izomorfismus $(R(S))^*$ na $(X/\operatorname{Ker} S)^*$ (V III.21)

$R(q') = (\operatorname{Ker} S)^\perp$ dle Tvrzení II.14(a)

Tedy $R(S') = R(S_0') = (\operatorname{Ker} S)^\perp$, což jsme chtěli.