<u>Věta 8</u>: $f \in L^1_{loc}((a,b))$

(a): $g_1, g_2 \in L^1_{loc}$ slabé derivace $f \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b)): \int g_1 \cdot \varphi = \int g_2 \cdot \varphi$

tj. $\int (g_1 - g_2)\varphi = 0$

tedy dle L6 je $g_1 - g_2 = 0$ s.v.

μ_1, μ_2 slabé derivace $f \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b)): \int \varphi \, d\mu_1 = \int \varphi \, d\mu_2$

tj. $\int \varphi \, d(\mu_1 - \mu_2) = 0$

$\Rightarrow \mu_1 - \mu_2 = 0$ dle Lemma 6

(b) ① f absolutně spojitá (dále AC) na $[a,b]$

$\Rightarrow$ víme z analýzy, že f' existuje s.v., $f' \in L^1((a,b))$

a $f(t) = \int_0^t f'$

Rovněž víme, že pro AC funkce platí integrace per partes

a $\varphi \in \mathcal{D}((a,b)) \Rightarrow \varphi \in AC([a,b])$

tj. $\int_a^b f \varphi' = \underbrace{[f\varphi]_a^b}_{=0} - \int_a^b f' \varphi$

② Nechť $g \in L^1((a,b))$ je slabou derivací funkce f

Označme $f_1(t) = \int_0^t g$, $t \in [a,b]$. Pak z analýzy víme,

že f_1 je AC a $f_1' = g$ s.v.

Tedy dle ① je g slabou derivací funkce f_1

Tedy 0 je slabou derivací $f - f_1$, proto z T7 plyne,

že ex. c, že $f - f_1 = c$ s.v. $\Rightarrow f = f_1 + c$ s.v.

Stačí volit $f_0 := f_1 + c$. Pak $f_0 \in AC$, $f_0 = f$ s.v.

a $f_0' = g$ s.v.

(3) f lokálně AC $\Rightarrow$ $\forall [c,d] \subset (a,b)$ je f AC na $[c,d]$

$\Rightarrow f'$ ex. s.v. na (a,b) (na každém (c,d), kde $[c,d] \subset (a,b)$, což je totéž)

navíc f' je slabou derivací f:

$\varphi \in \mathcal{D}((a,b)) \Rightarrow$ ex. $[c,d] \subset (a,b)$, že $\varphi \in \mathcal{D}((c,d))$

Pak s využitím (1) máme

$$\int_a^b f\varphi' = \int_c^d f\varphi' = -\int_c^d f'\varphi = -\int_a^b f'\varphi$$

(4) $g \in L^1_{loc}$ je slabou derivací funkce f.

Zvolme $c \in (a,b)$ a definujme $f_1(t) = \int_c^t g$. Pak f_1 je lokálně AC, $f_1' = g$ s.v. Tedy dle (3) je g slabou derivací f_1.

Proto 0 je slabou derivací $f - f_1$. Tedy dle T7 existuje konstanta d, že $f = f_1 + d$ s.v.

Stačí položit $f_0 = f_1 + d$.

Věta 8 (c.)

Ukážeme, že existuje $\mu \geq 0$, která je slabou derivací f, právě když ex. f_0 neklesající omezená, že $f = f_0$ s.v.

① Nechť μ je nezáporná míra, která je slabou derivací f.

Označme $f_1(t) = \mu((a,t))$, $t \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f_1 je neklesající a omezená.

Navíc $\forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b))$:

Fubini (φ' spojitá, omezená)

$$\int_{(a,b)} \varphi(t)\, d\mu(t) = \int_{(a,b)} \int_a^t \varphi'(s)\, ds\, d\mu(t) = \int_a^b \int_{[s,b)} \varphi'(s)\, d\mu(t)\, ds =$$

$(a \leq s \leq t < b)$

$$= \int_a^b \varphi'(s) \cdot \mu([s,b))\, ds = \int_a^b \varphi'(s) \cdot \left(\mu((a,b)) - f_1(s)\right) ds =$$

$$= -\int_a^b f_1(s)\varphi'(s)\, ds + \underbrace{\left[\varphi(s) \cdot \mu((a,b))\right]_a^b}_{=0}$$

Tedy μ je slabou derivací f_1

$\overset{T7}{\Rightarrow} f - f_1 = c$ s.v. (pro nějaké $c \in \mathbb{R}$)

stačí teď vzít $f_0 = f_1 + c$

② opačně, nechť f je neklesající a omezená

pro $(c,d) \subset (a,b)$ definujme

$$\mu((c,d)) = \lim_{t \to d-} f(t) - \lim_{t \to c+} f(t)$$

Pro $A \subset (a,b)$ libovolnou definujme

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) : I_j \subset (a,b) \text{ otevřené intervaly}, \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \supset A \right\}$$

Pak μ^* je konečná vnější míra na (a,b):

$\mu^*(\emptyset) = 0$ (protože f má bod spojitosti t_0 a $\mu(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$)

μ^* je σ-subaditivní

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$$

$\Big\lceil\ \varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. $I_{j,k}$, $\bigcup_k I_{j,k} \supset A_j$, $\sum_k \mu(I_{j,k}) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$

Pak $\bigcup_j \bigcup_k I_{j,k} \supset \bigcup_j A_j$, $\sum_{j,k} \mu(I_{j,k}) < \sum_j \mu^*(A_j) + \varepsilon$ $\Big\rfloor$

Tvrzení:

(i) $[c,d] \subset (a,b) \Rightarrow \mu^*([c,d]) = \lim_{t \to d+} f(t) - \lim_{t \to c-} f(t)$

$\Big\lceil \leq$: $[c,d] \subset (c-\varepsilon, d+\varepsilon)$ pro každé $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \mu^*([c,d]) \leq \mu((c-\varepsilon, d+\varepsilon))$, limita pro $\varepsilon \to 0+$ dokazuje

$$\text{„}\leq\text{"}$$

$\geq$: $[c,d] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

$[c,d]$ kompaktní $\Rightarrow$ ex. N: $\bigcup_{j=1}^{N} I_j \supset [c,d]$

Pak $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) \geq \sum_{j=1}^{N} \mu(I_j)$. BÚNO $I_j \cap [c,d] \neq \emptyset$ pro každé j

Dále: $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ je otevřený interval

a platí $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) \leq \sum_{j=1}^{N} \mu(I_j)$

$\Big\lceil$ indukcí dle N:

$N = 1$ platí.

Platí pro N. Mějme $I_1, \dots, I_{N+1}$

Pokud $I_{N+1} \supset [c,d]$, je to zřejmé.

Jinak ex. $j_0 \leq N$: $I_{j_0} \cap I_{N+1} \neq \emptyset$

pak $\mu(I_{j_0} \cup I_{N+1}) \leq \mu(I_{j_0}) + \mu(I_{N+1})$

(z definice a neklesajícnosti f)

Tedy

$$\sum_{j=1}^{N+1} \mu(I_j) \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{N} \mu(I_j) + \mu(I_{j_0} \cup I_{N+1})$$

$$\overset{\text{ind. předp.}}{\geq} \mu(I_1 \cup \dots \cup I_{N+1}) \Big\rfloor$$

přičemž $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{N} I_j\right) \geq \lim_{t \to d+} f(t) - \lim_{t \to c-} f(t)$ z definice

To dokazuje důkaz „$\geq$"

(ii) $[c,d) \subset (a,b) \Rightarrow \mu^*([c,d)) = \mu([c,d))$

$\Gamma \leq$ z definice $([c,d) \subset [c,d))$

$\geq \mu^*((c,d)) \geq \mu^*([c+\varepsilon, d-\varepsilon])$ pro $\varepsilon > 0$ (malé)

$\downarrow$ dle (c)

$\mu([c,d))$ $\lrcorner$

(iii) $A \subset (a,b)$,

$c \in (a,b) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap (a,c]) + \mu^*(A \cap (c,b))$

Γ stačí $\geq$:

$\varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. (I_j) otevřené intervaly, že

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad a \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \mu^*(A) + \varepsilon$$

$J_j := I_j \cap (a,c]$

$H_j := I_j \cap (c,b)$

$$\Rightarrow \mu^*(A \cap (c,b)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(H_j)$$

$$\mu^*(A \cap (a,c]) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(J_j)$$

Přitom $\mu(H_j) + \mu^*(J_j) = \mu(I_j)$

(plyne z toho, že $\mu^*((u,v]) = \lim_{t \to v+} f(t) - \lim_{t \to u+} f(t)$

$\leq$: $(u,v] \subset (u, v+\varepsilon)$

$\geq$: $[u-\varepsilon, v] \subset (u,v]$ + (c))

Tedy $\mu^*(A \cap (c,b)) + \mu^*(A \cap (a,c]) \leq$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(H_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(J_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) < \mu^*(A) + \varepsilon \lrcorner$$

Tedy: μ^* zúžená na borelovskou σ-algebru je σ-aditivní míra.

Označme ji μ. Je regulární díky definici.

Navíc $f(t) = \lim_{s \to a+} f(s) + \mu((a,t))$ pro s.v. t

[v bodech spojitosti f, tj. ve všech až na spočetně mnoho]

$\Rightarrow$ z bodu (1) máme, že μ je slabá derivace f.