Tvrzení IV.11 (a) Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'((a,b))$, $\Lambda' = 0$.

Tedy: $\forall \varphi \in \mathcal{D}((a,b)) : \Lambda(\varphi') = -\Lambda'(\varphi) = 0$

$\varphi \in \mathcal{D}((a,b)) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}((a,b))$

Přitom $\{\varphi';\ \varphi \in \mathcal{D}((a,b))\} = \{\psi \in \mathcal{D}((a,b)) : \int_a^b \psi = 0\}$

$\ulcorner \cdot\ \psi = \varphi' \Rightarrow \int_a^b \psi = [\varphi]_a^b = 0$

$\cdot\ \psi \in \mathcal{D}((a,b))$, $\int_a^b \psi = 0$. Položíme $\varphi(t) = \int_a^t \psi$, $t \in (a,b)$

Pak $\varphi \in C^\infty((a,b))$, $\varphi' = \psi$

navíc $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$

$\ulcorner$ najdeme $[c,d] \subset (a,b)$, že spt $\psi \subset [c,d]$

pak spt $\varphi \subset [c,d]$ taky $\lrcorner$

$\lrcorner$

Tedy máme: $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$, $\int_a^b \psi = 0 \Rightarrow \Lambda(\psi) = 0$

Tedy, jinými slovy, $\operatorname{Ker} \Lambda_1 \subset \operatorname{Ker} \Lambda$

Zvolme $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$, že $\Lambda_1(\varphi_0) = \int_a^b \varphi_0 = 1$

a položme $c := \Lambda(\varphi_0)$

Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ platí $\varphi - \Lambda_1(\varphi)\cdot\varphi_0 \in \operatorname{Ker} \Lambda_1$

Tedy patří do $\operatorname{Ker} \Lambda$, neboli $\Lambda(\varphi - \Lambda_1(\varphi)\cdot\varphi_0) = 0$

Tedy $\Lambda(\varphi) = \Lambda_1(\varphi)\cdot\Lambda(\varphi_0) = c\cdot\Lambda_1(\varphi) = \Lambda_c(\varphi)$

Neboli $\Lambda = \Lambda_c$

(b) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená souvislá, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$,
$D^\alpha \Lambda = 0$ pro každý multiindex α splňující $|\alpha| = 1$
$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{F} : \Lambda = \Lambda_c$

(b-1) Dokážeme to pro $\Omega = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j)$, a to indukcí podle d.

- $d = 1$ ... to jsme dokázali v (a)

- Nechť $d \geq 2$ a platí to pro $d-1$. Dokážeme to pro d

$$\Omega = \prod_{j=1}^{d} (a_j, b_j), \quad \Omega' := \prod_{j=1}^{d-1} (a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^{d-1}$$

pro $x \in \mathbb{R}^d$ píšeme $x = (x', x_d)$, kde $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$, $x_d \in \mathbb{R}$
podobně pro multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ píšeme $\alpha = (\alpha', \alpha_d)$

Nechť tedy $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $D^\alpha \Lambda = 0$ pro každý multiindex α splňující $|\alpha| = 1$

Tedy: $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall j \in \{1 \dots d\} : \Lambda(\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi) = 0$

<u>Claim:</u> $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \frac{\partial \varphi}{\partial x_d} = \psi$

$$\Leftrightarrow \forall x' \in \Omega' : \int_{a_d}^{b_d} \psi(x', x_d)\, dx_d = 0$$

$$\Rightarrow \int_{a_d}^{b_d} \psi(x', x_d)\, dx_d = \left[\varphi(x', x_d)\right]_{x_d = a_d}^{b_d} = 0$$

$\Leftarrow$ Nechť $\varphi(x', x_d) = \int_{a_d}^{x_d} \psi(x', t)\, dt$.

Pak $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_d} = \psi$.

Tedy: Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definujme funkci $T\varphi$ předpisem

$$T\varphi(x') = \int_{a_d}^{b_d} \varphi(x', x_d)\, dx_d, \quad x' \in \Omega'.$$

Pak $T\varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega')$ je lineární.

Navíc $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} \Lambda$

Dále zvolme $\eta \in \mathcal{D}((a_d, b_d))$ splňující $\int_{a_d}^{b_d} \eta = 1$

Definujme distribuci $\Lambda' \in \mathcal{D}'(\Omega')$ předpisem

$$\Lambda'(\varphi) = \Lambda\Big(\underbrace{(x', x_d) \longmapsto \varphi(x') \cdot \eta(x_d)}_{\text{značíme } \varphi\cdot\eta} \Big), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$$

Λ' je distribuce:

$\lceil$ dobře def. : $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega') \Rightarrow \varphi \cdot \eta \in \mathcal{D}(\Omega)$

linearita jasná

spojitost: $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega') \Rightarrow \varphi_n \eta \to \varphi \cdot \eta$ v $\mathcal{D}(\Omega)$

$\lceil$ $\exists K$ kompakt, $\operatorname{spt} \varphi_n \subset K$

$\Rightarrow \operatorname{spt} \varphi_n \cdot \eta \subset K \times \operatorname{spt} \eta$

$$+ \; D^\alpha(\varphi_n \eta) = D^{\alpha'}\varphi_n \cdot \eta^{(\alpha_d)} \rightrightarrows \underbrace{D^{\alpha'}\varphi \cdot \eta^{(\alpha_d)}}_{= D^\alpha(\varphi\cdot\eta)} \rfloor$$

Navíc $\forall \alpha' \in \mathbb{N}_0^{d-1}$, $|\alpha'| = 1$: $D^{\alpha'}\Lambda' = 0$

$$\lceil D^{\alpha'}\Lambda'(\varphi) = (-1)^{|\alpha'|}\Lambda'(D^{\alpha'}\varphi) = (-1)^{|\alpha'|}\Lambda((D^{\alpha'}\varphi)\cdot\eta) = (-1)^{|\alpha'|}\underbrace{\Lambda\big(D^{(\alpha',0)}(\varphi\cdot\eta)\big)}_{=0}, \rfloor$$

Dle indukčního předpokladu ex. $c \in \mathbb{F}$: $\Lambda' = \Lambda_c$ (v $\mathcal{D}'(\Omega')$)

Tvrdíme, že $\Lambda = \Lambda_c$ (v $\mathcal{D}'(\Omega)$)

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi - (T\varphi)\eta \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ navíc}$$

$$T(\varphi - (T\varphi)\eta) = 0, \text{ tedy } \Lambda(\varphi - (T\varphi)\eta) = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda(\varphi) = \Lambda((T\varphi)\cdot\eta) = \Lambda'(T\varphi) = \Lambda_c(T\varphi) =$$

$$= \int_{\Omega'} c\cdot (T\varphi)(x')\,dx' = \int_{\Omega'} c\cdot \int_{a_d}^{b_d} \varphi(x', x_d)\,dx_d\,dx' =$$

$$= \int_{\Omega} c\cdot\varphi(x)\,dx = \Lambda_c(\varphi).$$

(3-2) Ω obecná souvislá

Dle (3-1) víme, že pro každou otevřenou krychli $Q \subset \Omega$ existuje c_Q, že $\Lambda|_{\mathcal{D}(Q)} = \Lambda_{c_Q}$ na $\mathcal{D}'(Q)$

Tvrdím, že toto c_Q je stejné pro každou krychli, a že $\Lambda = \Lambda_c$, kde c je ta společná hodnota

Zvolme $x_0 \in \Omega$, Q_0 krychle se středem x_0, $Q_0 \subset \Omega$, $c := c_{Q_0}$

$$A = \{x \in \Omega;\ \exists Q \text{ krychle okolo } x, \text{ že } \Lambda|_{\mathcal{D}(Q)} = \Lambda_c\}$$

Pak $A \neq \emptyset$ ($x_0 \in A$)

A je otevřená ($x \in A$ ... Q ta krychle $\Rightarrow Q \subset A$)

A je relativně uzavřená v Ω

[$x \in \Omega$, $x \in \overline{A}$. Nechť Q je nějaký kvádr okolo x v Ω. Pak $Q \cap A \neq \emptyset$, zvolme $x_1 \in Q \cap A$, nechť Q_1 je kvádr okolo x_1 z definice A.

Pak: $\Lambda|\mathcal{D}(Q) = \Lambda_{c_Q}$

$$\Lambda|\mathcal{D}(Q_1) = \Lambda_c$$

$$Q \cap Q_1 \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda_{c_Q}|_{Q \cap Q_1} = \Lambda_c|_{Q \cap Q_1} \Rightarrow c = c_Q \ ]$$

Tedy $A = \Omega$.

Zbývá ukázat, že $\Lambda = \Lambda_c$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $K := \operatorname{spt} \varphi$ je kompaktní.

pro každé $x \in K$ zvolme kvádr Q_x okolo x, že $\Lambda|\mathcal{D}(Q_x) = \Lambda_c$ a zvolme menší kvádr P_x okolo x, že $x \in P_x \subset \overline{P_x} \subset Q_x$

P_x, $x \in K$ je otevřené pokrytí $K \Rightarrow$ ex. $x_1, \dots, x_n \in K$, že $P_{x_1} \cup \dots \cup P_{x_n} \supset K$

Nechť $\eta_j \in \mathcal{D}(Q_{x_j})$, že η_j nabývá hodnot z $[0,1]$, $\eta_j|P_{x_j} = 1$ (viz Tvrzení 10.2(5))

Uvažme funkce: $\varphi_1 = \eta_1 \cdot \varphi$

$$\varphi_2 = \eta_2(\varphi - \varphi_1) = \eta_2(1-\eta_1)\varphi$$

$$\varphi_3 = \eta_3 \cdot (\varphi - \varphi_1 - \varphi_2) =$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n = \eta_n(\varphi - \varphi_1 - \dots - \varphi_{n-1})$$

$\Rightarrow \varphi_j \in \mathcal{D}(Q_j)$

a $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = \varphi$

$\Gamma x \notin \operatorname{spt} \varphi = K \Rightarrow \varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$

$x \in K \Rightarrow$ nalézt pro j první $t \in P_{t_j} \Rightarrow \eta_j(t) = 1$

$\Rightarrow \varphi_j(t) = \varphi(t) - \varphi_1(t) - \dots - \varphi_{j-1}(t)$, t.

$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \dots + \varphi_{j-1}(t) + \varphi_j(t)$

$\varphi_k(t) = 0$ pro $k > j$ $\lrcorner$

$$\Lambda(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} \Lambda(\varphi_j) = \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_j} c \cdot \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} c \cdot \varphi_j = \int_{\Omega} c \cdot \varphi = \Lambda_c(\varphi)$$

Tedy opravdu $\Lambda = \Lambda_c$.