$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $G \subset \Omega$ otevřená. Λ je <u>nulová na G</u>, jestliže $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\operatorname{spt} \varphi \subset G \Rightarrow \Lambda(\varphi) = 0$

- <u>Nosič Λ</u> je $\operatorname{spt} \Lambda = \Omega \setminus \bigcup \{G \subset \Omega \text{ otevřená}, \Lambda \text{ nulová na } G\}$
$= \{x \in \Omega;\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): \operatorname{spt} \varphi \subset U(x,\varepsilon)\ \&\ \Lambda(\varphi) \neq 0\}$

<u>V17</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

(a) $\Lambda = \Lambda_f$ pro $f \in L^1_{loc}(\Omega)$: Pak

$$\operatorname{spt} \Lambda = \operatorname{spt} f = \{x \in \Omega;\ \forall \varepsilon > 0\ \lambda^d(\{y \in U(x,\varepsilon); f(y) \neq 0\}) > 0\}$$
$$= \Omega \setminus \bigcup \{G \subset \Omega \text{ otevřená}; f = 0 \text{ s.v. na } G\}$$

[$G \subset \Omega$ otevřená, $f = 0$ s.v. na $G \Rightarrow \Lambda$ je nulová na G
$(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{spt} \varphi \subset G \Rightarrow \Lambda(\varphi) = \int_\Omega f \cdot \varphi = \int_G f \cdot \varphi = 0)$

$G \subset \Omega$ otevřená, Λ_f nulová na $G \Rightarrow \Lambda_f|_{\mathcal{D}(G)} = 0$

$\Rightarrow f = 0$ s.v. na G dle Lemmatu 6]

(b) $\Lambda = \Lambda_\mu$ pro nezápornou míru $\mu \Rightarrow$
$\operatorname{spt} \Lambda = \operatorname{spt} \mu = \Omega \setminus \bigcup \{G \subset \Omega \text{ otevřená}; \mu|_G \equiv 0\}$

[$G \subset \Omega$ otevřená, $\mu|_G \equiv 0 \Rightarrow \Lambda_\mu$ je nulová na G

$(\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{spt} \varphi \subset G \Rightarrow \Lambda(\varphi) = \int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_G \varphi \, d\mu = 0)$

$G \subset \Omega$ otevřená, Λ_μ nulová na G
$\Rightarrow \Lambda_\mu|_{\mathcal{D}(G)} = 0 \Rightarrow$ dle Lemmatu 6 je $\mu|_G \equiv 0$]

(c) $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{spt}\varphi \cap \operatorname{spt}\Lambda = \emptyset \Rightarrow \Lambda(\varphi) = 0$

(neboli: Λ je nulová na $\Omega \setminus \operatorname{spt}\Lambda$)

<u>Dk:</u> $\operatorname{spt}\varphi \subset \Omega \setminus \operatorname{spt}\Lambda = \bigcup\{G \subset \Omega$ otevřená; Λ nulová na $G\}$

$\operatorname{spt}\varphi$ kompaktní $\Rightarrow$ ex. $G_1, \dots, G_n \subset \Omega$ otevřené, Λ nulová na G_j pro $j = 1, \dots, n$
$\operatorname{spt}\varphi \subset G_1 \cup \dots \cup G_n$

Dokážeme, že Λ je nulová na $G_1 \cup \dots \cup G_n$. K tomu stačí indukce a tvrzení (*) Λ nulová na G_1 i na $G_2 \Rightarrow \Lambda$ nulová na $G_1 \cup G_2$

<u>Důkaz (*)</u>: Nechť Λ je nulová na G_1 i na G_2, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{spt}\varphi \subset G_1 \cup G_2$

- Pokud $\operatorname{spt}\varphi \subset G_1$, pak $\Lambda(\varphi) = 0$ a jsme hotovi.
- Nechť $\operatorname{spt}\varphi \not\subset G_1$. Označme $L := \operatorname{spt}\varphi \setminus G_1$. Pak L je neprázdná kompaktní podmnožina G_2
  zvolme $0 < \varepsilon < \underbrace{\operatorname{dist}(L, \mathbb{R}^d \setminus G_2)}_{\text{to je kladné, protože } L \text{ je kompaktní}}$

  $H := \{x \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}(x, L) \le \varepsilon\} \Rightarrow H$ je kompaktní,
  $H \supset L$, $H \subset G_2$

  Dle Tvrzení 2(5) najdeme $\psi \in \mathcal{D}(G_2)$, $\psi = 1$ na H

  pak:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{spt}(\varphi\cdot\psi) \subset G_2 \Rightarrow \Lambda(\varphi\cdot\psi) = 0 \\ \operatorname{spt}(\varphi\cdot(1-\psi)) \subset G_1 \Rightarrow \Lambda(\varphi\cdot(1-\psi)) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Lambda(\varphi) = 0$$

$$\varphi(x)\cdot(1-\psi(x)) \neq 0 \Rightarrow x \in \operatorname{spt}\varphi \ \&\ \operatorname{dist}(x, L) > \varepsilon$$

$$\Rightarrow \operatorname{spt}\varphi(1-\psi) \subset \operatorname{spt}\varphi \cap \{x;\ \operatorname{dist}(x, L) \geq \varepsilon\} \subset G_1$$

(d) Λ má kompaktní nosič (tj. $\operatorname{spt} \Lambda$ je kompaktní podmnožina Ω)

$\Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}_0,\ C > 0$, že $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega): |\Lambda(\varphi)| \le C \cdot \|\varphi\|_N$.

Speciálně, Λ je konečného řádu.

__Dk:__ $K := \operatorname{spt} \Lambda \Rightarrow K \subset \Omega$, K kompaktní

zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ (pokud $\Omega = \mathbb{R}^d$, vezmeme $\varepsilon = 1$)

$H := \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) \le \varepsilon\} \Rightarrow H \subset \Omega$, H kompaktní, $K \subset \operatorname{Int} H$

zvolme $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_0 \equiv 1$ na H. pak $L := \operatorname{spt} \varphi_0$ je kompaktní

$\overset{V13}{\Rightarrow} \exists\, C > 0,\ N \in \mathbb{N}_0: \forall \varphi \in \mathcal{D}_L(\Omega): |\Lambda(\varphi)| \le C \|\varphi\|_N$

Dále: Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\varphi \cdot \varphi_0)$

(protože $\operatorname{spt} \varphi(1-\varphi_0) \subset \overline{\Omega \setminus H} \subset \Omega \setminus K \Rightarrow$ dle (c)

je $\Lambda(\varphi(1-\varphi_0)) = 0$)

Tedy $|\Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\varphi \cdot \varphi_0)| \le C \cdot \|\varphi \cdot \varphi_0\|_N$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

($\operatorname{spt}(\varphi \cdot \varphi_0) \subset L$)

Nechť α je multiindex, $|\alpha| \le N$

$$D^\alpha(\varphi \cdot \varphi_0) = \sum_{0 \le \beta \le \alpha} C_{\alpha,\beta}\, D^\beta \varphi\, D^{\alpha-\beta} \varphi_0 \quad \text{(derivování součinu)}$$

$$\Rightarrow \|D^\alpha(\varphi \cdot \varphi_0)\|_\infty \le \sum_{0 \le \beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta}\, \|\varphi\|_N \|\varphi_0\|_N$$

$$\Rightarrow |\Lambda(\varphi)| \le C \cdot \|\varphi_0\|_N \cdot \max_{|\alpha| \le N} \Big(\sum_{0 \le \beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta}\Big) \cdot \|\varphi\|_N$$

(e) BÚNO $p=0$, tj. $\operatorname{spt}\Lambda=\{0\}$. Dle (d) existuje $N\in\mathbb{N}$, $C>0$, že

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega):\quad |\Lambda(\varphi)|\le C\cdot\|\varphi\|_N$$

Ukážeme, že Λ je lineární kombinací $D^\alpha\Lambda_{\delta_0}$, $|\alpha|\le N$.

K tomu stačí ukázat:

$$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega),\ D^\alpha\varphi(0)=0 \text{ pro } |\alpha|\le N \Rightarrow \Lambda(\varphi)=0$$

(viz Lemma L na slidech)

Zvolme $\frac{1}{2}>r>0$, ať $B(0,2r)\subset\Omega$ a vyberme $\psi\in\mathcal{D}(U(0,2r))$, $\psi\equiv1$ na $U(0,r)$

pro $\delta>0$ nechť $\psi_\delta(t)=\psi(\delta t)$, $t\in\mathbb{R}^d$

$\Rightarrow \psi_\delta\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi_\delta\equiv1$ na okolí 0

$\operatorname{spt}\psi_\delta\subset U(0,\frac{2}{\delta}r)$

Podle (c) platí $\Lambda(\varphi)=\Lambda(\psi_\delta\cdot\varphi)$ pro každé $\delta>0$.

Tedy $|\Lambda(\varphi)|=|\Lambda(\psi_\delta\cdot\varphi)|\le C\cdot\|\psi_\delta\cdot\varphi\|_N$

Protože $D^\alpha\varphi(0)=0$ pro $|\alpha|\le N$ a $\varphi\in C^\infty$, z věty o Taylorově polynomu pro funkce více proměnných plyne:

$$D^\alpha\varphi(t)=o(\|t\|^{N-|\alpha|}) \text{ pro } \|t\|\to0 \text{ pro každé } \alpha,\ |\alpha|\le N$$

<u>Tedy</u>: Nechť $\eta>0$ je libovolné. Pak existuje $\theta>0$, že

$$\forall t\in B(0,\theta)\ \forall\alpha,\ |\alpha|\le N:\quad |D^\alpha\varphi(t)|\le\eta\cdot\|t\|^{N-|\alpha|}$$

Zvolme $\delta>1$ tak velké, aby $\frac{2}{\delta}r<\theta$.

a odhadněme $\|\psi_\delta\cdot\varphi\|_N$:

Zvolme α, $|\alpha| \leq N$

$$\|D^\alpha(\psi_\delta \varphi)\|_\infty = \sup_{\|x\| < \frac{2}{\delta} r} |D^\alpha(\psi_\delta \varphi)(x)|$$

Nechť $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| < \frac{2}{\delta} r$. Pak

$$|D^\alpha(\psi_\delta \cdot \varphi)(x)| = \Big|\sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} \cdot D^\beta \varphi(x) \cdot D^{\alpha-\beta} \psi_\delta(x)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} D^\beta \varphi(x) \cdot \delta^{|\alpha-\beta|} D^{\alpha-\beta} \psi(\delta x)\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} \cdot \eta \|x\|^{N-|\beta|} \cdot \delta^{|\alpha|-|\beta|} \cdot \|\psi\|_N$$

$$\leq \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} \cdot \eta \cdot \left(\frac{2}{\delta} r\right)^{N-|\beta|} \cdot \delta^{|\alpha|-|\beta|} \cdot \|\psi\|_N \leq$$

$$\leq \eta \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta} \cdot \overbrace{(2r)^{N-|\beta|}}^{\leq 1} \cdot \overbrace{\delta^{|\alpha|-N}}^{\leq 1} \|\psi\|_N$$

$$\leq \eta \cdot \|\psi\|_N \cdot \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta}$$

$$\Rightarrow \|\psi_\delta \cdot \varphi\|_N \leq \eta \cdot \|\psi\|_N \cdot \max_{|\alpha| \leq N} \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta}$$

Tedy $\forall \eta > 0$: $|\Lambda(\varphi)| \leq C \cdot \eta \cdot \|\psi\|_N \cdot \max_{|\alpha| \leq N} \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha,\beta}$

Tedy $\Lambda(\varphi) = 0$.

Lemma L: X vektorski prostor, $f_1, \dots, f_n, g$ linearni funkcionali

$$\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} g \implies g \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$$

Oglejmo $F: X \to \mathbb{F}^n$, $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

Pa je $\operatorname{Ker} F = \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} f_j$, torej $\operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} g$.

~~Naj~~ Naj bo $Y := F(X)$. Definirajmo zabris

$h: Y \to \mathbb{F}$ predpisa $h(F(x)) = g(x)$. To je dobro definirano
dig pogojem $\operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} g$

h lahko razširimo na $\tilde{h}: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ linearno

pa $\tilde{h}(a_1, \dots, a_n) = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n$, kjer $c_j = \tilde{h}(e_j)$, $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$

Pa $g(x) = h(F(x)) = \tilde{h}(F(x)) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$

Torej $g = c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$.