Tvrzení 23(a) Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$.
Pak definujme $\psi(y) = \Lambda(x \mapsto \varphi(x,y))$, $y \in \mathbb{R}^{d_2}$
Pak $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_2})$ a $\forall \alpha$ multiindex $\in \mathbb{N}_0^{d_2}$:

$$D^\alpha \psi(y) = \Lambda(x \mapsto D^{(0,\alpha)} \varphi(x,y))$$

Dk: (1) ψ je dobře definováno:
spt φ je kompaktní, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{d_1} + \mathbb{R}^{d_2})$
zřejmě $x \mapsto \varphi(x,y)$ je C^∞ na $\mathbb{R}^{d_1}$
navíc nosič je obsažen v projekci
spt φ na $\mathbb{R}^{d_1}$, což je kompaktní
Tedy zobrazení $\varphi^y : x \mapsto \varphi(x,y)$ patří do $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1})$

(2) pokud $y \notin$ projekce spt φ na $\mathbb{R}^{d_2}$, pak $\psi(y) = 0$
Tedy ψ má kompaktní nosič.

(3) Pokud $y_n \to y$ v $\mathbb{R}^{d_2}$, pak $\varphi^{y_n} \to \varphi^y$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1})$

- spt $\varphi^{y_n} \subset$ projekce spt φ na $\mathbb{R}^{d_1}$, což je kompaktní

- $\alpha \in \mathbb{N}_0^{d_1} \Rightarrow D^{(\alpha,0)}\varphi$ je spojitá, tedy stejnoměrně spojitá. Tedy $D^\alpha \varphi^{y_n} \rightrightarrows D^\alpha \varphi^y$
[$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ $\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\| < \delta$
$\Rightarrow |D^{(\alpha,0)}\varphi(u_1,v_1) - D^{(\alpha,0)}\varphi(u_2,v_2)| < \varepsilon$
Tedy ex. n_0, že pro $n \geq n_0$ $\|y_n - y\| < \delta$
Tedy $\forall n \geq n_0$ $\forall x$:
$$|D^{(\alpha,0)}\varphi(x,y_n) - D^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)| < \varepsilon$$
$$\shortparallel$$
$$|D^\alpha \varphi^{y_n}(x) - D^\alpha \varphi^y(x)|$$
Tedy ψ je spojitá [$y_n \to y \Rightarrow \varphi^{y_n} \to \varphi^y \Rightarrow \Lambda(\varphi^{y_n}) \to \Lambda(\varphi^y)$]

(4) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{d_2}$: $D^\alpha \psi(y) = \Lambda\left(x \mapsto D^{(0,\alpha)}\varphi(x,y)\right)$

Ukážeme indukcí. Nejprve pro $|\alpha| = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\psi(y) = \Lambda\left(x \to \frac{\partial}{\partial y_1}\varphi(x,y)\right)$$

$$\frac{\psi(y+te_1^1)-\psi(y)}{t} = \Lambda\Big(\underbrace{x \mapsto \frac{\varphi(x,y+te^1)-\varphi(x,y)}{t}}\Big)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1})$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\psi(y) \qquad\qquad x \mapsto \frac{\partial}{\partial y_1}\varphi(x,y)$$

$$\varphi_t(x,y) = \frac{\varphi(x,y+te_1)-\varphi(x,y)}{t} \xrightarrow{L22} \frac{\partial}{\partial y_1}\varphi \quad v\ \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1}+\mathbb{R}^{d_2})$$

Tím spíš pro každé $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_2})$: $(\varphi_t)^y \to \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\varphi\right)^y$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1})$

Obecný případ : indukcí dle α

Máme-li pro nějaké α : $D^\alpha\psi(y) = \Lambda\left(x \mapsto D^{(0,\alpha)}\varphi(x,y)\right)$, pak dle (3) je $D^\alpha\psi$ spojitá a dle předchozího můžeme přidat další parciální derivaci.

$\boxed{\text{Lemma L}}$ Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G \subset \Omega$ otevřená taková, že $\overline{G}$ je kompaktní podmnožina Ω (tj. G omezená a $\overline{G} \subset \Omega$). Pak existuje N a regulární borelovské míry μ_α, $|\alpha| \le N$ na $\overline{G}$, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) : \Lambda(\varphi) = \sum_{|\alpha| \le N} \int_{\overline{G}} D^\alpha \varphi \, d\mu_\alpha$$

Dk: 1) Víme, že existuje $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$, že
$\forall \varphi \in \mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) : |\Lambda(\varphi)| \le C \cdot \|\varphi\|_N$

2) Nechť $X = (C^N(\overline{G}), \|\cdot\|_N)$, tj.

$X = \{ f : \overline{G} \to \mathbb{F}, \ \forall |\alpha| \le N \ D^\alpha f$ je spojitá na G a spojitě rozšiřitelná na $\overline{G} \}$

Pak $\mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) \subset\subset X$

$\Lambda : \mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) \to \mathbb{F}$ je lineární funkcionál spojitý v $\|\cdot\|_N$

Díky H-B větě ex. $\tilde{\Lambda} \in X^*$, $\tilde{\Lambda} \restriction \mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) = \Lambda$, $\|\tilde{\Lambda}\| \le C$

3) Uvažme zobrazení $T : C^N(\overline{G}) \to \prod_{|\alpha| \le N} C(\overline{G})$

Dané předpisem $T(f) = (D^\alpha f)_{|\alpha| \le N}$

Pokud na $Y = \prod_{|\alpha| \le N} C(\overline{G})$ zavedeme normu $\|(f_\alpha)_{|\alpha| \le N}\| = \max_{|\alpha| \le N} \|f_\alpha\|_\infty$

je T izometrie X do Y. Uvažme zobrazení $\psi_0 := \tilde{\Lambda} \circ T^{-1}$
Pak $\psi_0 : T(X) \to \mathbb{F}$ je spojitý lineární funkcionál.
Nechť $\psi \in Y^*$ je jeho rozšíření z H-B věty

(4) Z Rieszovy věty o reprezentaci $C(K)^*$ snadno plyne, že

$$Y^* \approx \prod_{|\alpha|\le N} M(\overline{G}), \quad \text{kde} \quad \|(\mu_\alpha)_{|\alpha|\le N}\| = \sum_{|\alpha|\le N} \|\mu_\alpha\|, \quad \text{tedy}$$

existují $(\mu_\alpha)_{|\alpha|\le N}$, že

$$\psi\big((f_\alpha)_{|\alpha|\le N}\big) = \sum_{|\alpha|\le N} \int_{\overline{G}} f_\alpha \, d\mu_\alpha$$

<u>Tedy</u> $\varphi \in \mathcal{D}_{\overline{G}}(\Omega) \Rightarrow$

$$\Lambda(\varphi) = \tilde{\Lambda}(\varphi) = \psi_0\big((D^\alpha \varphi)_{|\alpha|\le N}\big) = \psi\big((D^\alpha \varphi)_{|\alpha|\le N}\big)$$

$$= \sum_{|\alpha|\le N} \int_{\overline{G}} D^\alpha \varphi \, d\mu_\alpha .$$

Tvrzení 2.3(b) $\Lambda_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_1})$, $\Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d_2})$

$\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$:

$$\Lambda_1(x \longmapsto \Lambda_2(y \longmapsto \varphi(x,y))) = \Lambda_2(y \longmapsto \Lambda_1(x \longmapsto \varphi(x,y)))$$

Dk: spt φ je kompaktní $\Rightarrow$ ex. $r_1, r_2 > 0$: spt $\varphi \subset U(0,r_1) \times U(0,r_2)$

Dle Lemmatu L ex. $N_1 \in \mathbb{N}_0$, $\mu_\alpha, |\alpha| \leq N_1$, míry na $\overline{U(0,r_1)}$
$N_2 \in \mathbb{N}_0$, $\nu_\alpha, |\alpha| \leq N_2$, míry na $\overline{U(0,r_2)}$

že

$$\Lambda_1(\eta) = \sum_{|\alpha| \leq N_1} \int D^\alpha \eta \, d\mu_\alpha, \quad \eta \in \mathcal{D}_{\overline{U(0,r_1)}}(\mathbb{R}^{d_1})$$

$$\Lambda_2(\eta) = \sum_{|\alpha| \leq N_2} \int D^\alpha \eta \, d\nu_\alpha, \quad \eta \in \mathcal{D}_{\overline{U(0,r_1)}}(\mathbb{R}^{d_2})$$

$$\Lambda_1(x \longmapsto \Lambda_2(y \longmapsto \varphi(x,y))) = \sum_{|\alpha| \leq N_1} \int_{U(0,r_1)} D^\alpha \Lambda_2(y \longmapsto \varphi(x,y)) \, d\mu_\alpha(x)$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq N_1} \int_{U(0,r_1)} \Lambda_2(y \longmapsto D^{(\alpha,0)}\varphi(x,y)) \, d\mu_\alpha(x) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq N_1} \int_{U(0,r_1)} \Big(\sum_{|\beta| \leq N_2} \int_{U(0,r_2)} D^{(\alpha,\beta)} \varphi(x,y) \, d\nu_\beta(y) \Big) \, d\mu_\alpha(x)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq N_2} \int_{U(0,r_2)} \Big(\sum_{|\alpha| \leq N_1} \int_{U(0,r_1)} D^{(\alpha,\beta)} \varphi(x,y) \, d\mu_\alpha(x) \Big) \, d\nu_\beta(y)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq N_2} \int_{U(0,r_2)} \Lambda_1(x \longmapsto D^{(0,\beta)}\varphi(x,y)) \cdot d\nu_\beta(y) =$$

$$= \sum_{|\beta| \leq N_2} \int_{U(0,r_2)} D^\beta \Lambda_1(x \longmapsto \varphi(x,y)) \, d\nu_\beta(y) =$$

$$= \Lambda_2(y \longmapsto \Lambda_1(x \longmapsto \varphi(x,y)))$$