IV. 7.

<u>Věta č. 35</u> : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý podprostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Navíc: $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

<u>Dk</u>: ① Zřejmě $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

② Nechť $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ... Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní, že $\operatorname{spt} \varphi_j \subset K$ pro všechna j

Pak $\forall \alpha$: $D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows D^\alpha \varphi$

navíc, protože K je pevné za-násobím $\|\ \|$ je

i $(1+\|x\|^2)^N D^\alpha \varphi_j \rightrightarrows (1+\|x\|^2)^N D^\alpha \varphi$

Tedy $\varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

③ $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je husté v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nechť $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Zvolme $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\psi = 1$ na $B(0,1)$ (a třeba nabývá hodnot z intervalu $[0,1]$ - viz Tvrzení 2)

Nechť $\varphi_n(x) = \psi(x/n)\,\varphi(x)$. Pak $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$N \in \mathbb{N}_0$, α multiindex $\Rightarrow (1+\|x\|^2)^N D^\beta \varphi(x) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ pro každé $\beta \le \alpha$

$$\Rightarrow C_n = \sup_{\beta \le \alpha} \{ |(1+\|x\|^2)^N D^\beta \varphi(x)| \,;\, \|x\| \ge n \} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$|(1+\|x\|^2)^N D^\alpha (\varphi(x)(1-\psi(\tfrac{x}{n})))| = |(1+\|x\|^2)^N \Big(D^\alpha\varphi(x)\cdot(1-\psi(\tfrac{x}{n})) +$$

$$+ \sum_{0 \ne \beta \le \alpha} c_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi(x)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{n^{|\beta|}} D^\beta\psi(\tfrac{x}{n})\Big)| = \begin{cases} 0 & \text{pro } \|x\| \le n \\ \ldots & \text{pro } \|x\| \ge n \end{cases}$$

$$\ldots \le \underbrace{C_n}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\Big(|1-\psi(\tfrac{x}{n})| + \sum_{0\ne\beta\le\alpha} c_{\alpha,\beta}\cdot\frac{1}{n^{|\alpha|}} |D^\beta\psi(\tfrac{x}{n})|\Big)}_{\text{stejnoměrně želez.}} \rightrightarrows 0$$

Def: Temperovaná distribuce je spojité lineární zobrazení $\Lambda : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$. Prostor t.d. značíme $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Pozn: • $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \Lambda|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$

[z V35: ($\varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \varphi_j \to \varphi$ v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \Lambda(\varphi_j) \to \Lambda(\varphi)$)]

• $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda_1|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \Lambda_2|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \Rightarrow \Lambda_1 = \Lambda_2$

[z V35, protože tvrdí, že $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$]

• Tedy $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset\subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

• $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \{ \Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) ;\ \Lambda$ lze spojitě rozšířit na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \}$