

Definice Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je bezpodmínečně konvergentní, je-li každé její přerováním konvergentní.

Tvrzení: je-li $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v NLP X bezpodmínečně konvergentní, mají všechna přerováním již součet.

Důk. Osměnou. Necht' dvě přerováním mají různé součty. Pak existuje přerováním, které nemá součet.

Necht' tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = y$ (π je permutace \mathbb{N})

a $x \neq y$. zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{3} \|x - y\|$

z definice součtu řady plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tudíž, že

pro $n \geq n_0$ je $\|\sum_{k=1}^n x_k - x\| < \varepsilon$, $\|\sum_{k=1}^n x_{\pi(k)} - y\| < \varepsilon$

Konstruujeme permutaci $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takto:

- $\sigma(k) = k$ pro $k \leq n_0$

- najdeme $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > n_0$, aby

$$\{1, \dots, n_0\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(m_0)\}$$

a σ rozšíříme na $\{1, \dots, m_0\}$ tak, aby

$$\sigma(\{n_0+1, \dots, m_0\}) = \{\pi(1), \dots, \pi(m_0)\} \setminus \{1, \dots, n_0\}$$

dalec induktivně: najdeme m_j , m_j dříve $n_{j+1} > m_j$,

aby $\{\pi(1), \dots, \pi(m_j)\} \subset \{1, \dots, n_{j+1}\}$

a rozšíříme σ na $\{1, \dots, n_{j+1}\}$, aby $\sigma(\{m_{j+1}, \dots, n_{j+1}\}) = \{1, \dots, n_{j+1}\} \setminus \{\pi(1), \dots, \pi(m_j)\}$

pak najdeme $m_{j+1} > n_{j+1}$, aby $\{1, \dots, n_{j+1}\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(m_{j+1})\}$

a rozšíříme σ na $\{1, \dots, m_{j+1}\}$, aby $\sigma(\{n_{j+1}+1, \dots, m_{j+1}\}) = \{\pi(1), \dots, \pi(m_{j+1})\} \setminus \{1, \dots, n_{j+1}\}$

23 σ je permutace \mathbb{N}

a pro libovolný j platí $\|\sum_{k=1}^{m_j} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{n_j} x_{\sigma(k)}\| = \|\sum_{k=1}^{m_j} x_{\pi(k)} - \sum_{k=1}^{n_j} x_k\| \geq \|x - y\| - 2\varepsilon$