Tvrzení: Řada $\sum_{j\in J} x_j$ v Banachově prostoru je konvergentní $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists F_0\subset J$ konečná $\forall F\subset J$ konečnou, $F\cap F_0=\emptyset$: $\|\sum_{j\in F} x_j\|<\varepsilon$

Důkaz: $\Rightarrow$ Nechť $\sum_{j\in J} x_j = x$ a $\varepsilon>0$. Z definice konvergence řady plyne, že ex. $F_0\subset J$ konečná, že pro každou $F\supset F_0$ konečnou je $\|x-\sum_{j\in F} x_j\|<\frac{\varepsilon}{2}$

Pak-li $F\subset J$ je konečná, $F\cap F_0=\emptyset$, pak

$$\|\sum_{j\in F} x_j\| = \|(x-\sum_{j\in F_0} x_j) - (x-\sum_{j\in F\cup F_0} x_j)\| \le$$

$$\le \|x-\sum_{j\in F_0} x_j\| + \|x-\sum_{j\in F\cup F_0} x_j\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Leftarrow$: Pro každé $n\in\mathbb{N}$ najdeme $F_n\subset J$ konečnou tak, že pro každou $F\subset J$ konečnou, $F\cap F_n=\emptyset$, platí $\|\sum_{j\in F} x_j\|<\frac{1}{n}$

Pro $n\in\mathbb{N}$ položme $H_n:=F_1\cup\dots\cup F_n$ a $z_n:=\sum_{j\in H_n} x_j$

Pak pro každou dvojici $m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n$ platí $\|z_m-z_n\|<\frac{1}{n}$

$$\left(z_m-z_n=\sum_{j\in H_m\setminus H_n} x_j \quad \text{a} \quad (H_m\setminus H_n)\cap F_n=\emptyset \right)$$

Tedy posloupnost (z_n) je cauchyovská. Díky úplnosti X ex. $z:=\lim z_n$

Tvrdíme, že $z=\sum_{j\in J} x_j$

$\ulcorner$ $\varepsilon>0$ ... ex. $n\in\mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

Uvažme konečnou množinu H_n. Pak pro $F\supset H_n$ konečnou platí: $\|z-\sum_{j\in F} x_j\| \le \|z-\sum_{j\in H_n} x_j\| + \|\sum_{j\in F\setminus H_n} x_j\| < \|z-z_n\|+\frac{1}{n}$

Přitom $z-z_n=\lim_{m\to\infty}(z_m-z_n)$, tedy

$\|z-z_n\| = \lim_{m\to\infty}\|z_m-z_n\|\le\frac{1}{n}$, protože pro $m\ge n$ je $\|z_m-z_n\|<\frac{1}{n}$

Tedy $\|z-\sum_{j\in F} x_j\|<\frac{2}{n}<\varepsilon$. $\lrcorner$