Důkaz tvrzení 50 | X buď reálný NLP, X_C komplexifikace vektorového prostoru X

(a) Každé dvě přípustné normy na X_C jsou ekvivalentní.

Ukážeme, že pro každou přípustnou normu $\|\ \|$ na X_C platí

$$\cancel{\min}\ \max\{\|x\|,\|y\|\} \le \|(x,y)\| \le 2\max\{\|x\|,\|y\|\} :$$

$$: \|(x,y)\| = \|(x,0)\| + \|(0,y)\| = \|x\| + \|i\cdot(y,0)\| =$$
$$= \|x\| + \|(y,0)\| = \|x\| + \|y\| \le 2\max\{\|x\|,\|y\|\}$$

• $\|x\| = \|(x,0)\| = \|\tfrac{1}{2}((x,y)+(x,-y))\| \le$
$$\le \tfrac{1}{2}(\|(x,y)\| + \|(x,-y)\|) = \|(x,y)\|$$

$$\|y\| \le \|(y,x)\| = \|i\,(x,-y)\| = \|(x,-y)\| = \|(x,y)\|$$

Tedy: $\max\{\|x\|,\|y\|\} \le \|(x,y)\|$ ⌋

(b) $\|\cdot\|_{min}$ je přípustná norma a je ze všech přípustných norem ~~nejmen~~ nejmenší.

⌈ • Nejprve ukážeme, že $\|\ \|_{min}$ je norma na X_C v reálném smyslu:

⌈ Připomeňme, že $\|(x,y)\|_{min} = \sup\{\|\alpha x+\beta y\|;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha^2+\beta^2\le 1\}$

Pro $(x,y)\in X\times X$ definujme operátor $T_{x,y} : \mathbb{R}^2 \to X$

vzorcem $T_{x,y}(\alpha,\beta) = \alpha x + \beta y$

Pak $T_{x,y} \in L((\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2),X)$ a $\|T_{x,y}\| = \|(x,y)\|_{min}$

zobrazení $(x,y)\mapsto T_{x,y}$ je lineární a prosté $X\times X$ na $L(\mathbb{R}^2,X)$,

$\|\cdot\|_{min}$ je tedy norma ⌋

• Dále ukážeme, že $\|\cdot\|_{min}$ je norma i v komplexním smyslu.

⌈ K tomu stačí ukázat, že $\|\lambda\cdot(x,y)\|_{min} \le |\lambda|\cdot\|(x,y)\|_{min}$

$$(\gamma+i\delta)(x,y) = (\gamma x-\delta y,\ \gamma y+\delta x)$$

$$\alpha^2+\beta^2\le 1 \Rightarrow \|\alpha(\gamma x-\delta y)+\beta(\gamma y+\delta x)\| = \|(\alpha\gamma+\beta\delta)x+(\beta\gamma-\alpha\delta)y\|$$
$$\le \sqrt{(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\beta\gamma-\alpha\delta)^2}\ \|(x,y)\|_{min} = \sqrt{\alpha^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2}\ \|(x,y)\|_{min}$$
$$= \sqrt{\gamma^2+\delta^2}\ \|(x,y)\|_{min} = |\gamma+i\delta|\cdot\|(x,y)\|_{min},$$

• Dále ukážeme, že $\|\cdot\|_{min}$ je přípustná:

$$\|(x,0)\|_{min} = \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1} \|\alpha x+\beta\cdot 0\| = \sup_{|\alpha|\leq 1} |\alpha|\cdot\|x\| = \|x\|$$

$$\|(x,-y)\|_{min} = \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1} \|\alpha x-\beta y\| = \sup_{\alpha^2+\beta^2} \|\alpha x+\beta y\| = \|(x,y)\|_{min}$$

$$\alpha^2+\beta^2\leq 1 \Leftrightarrow \alpha^2+(-\beta)^2=1$$

• Nakonec ukážeme, že je nejmenší:

$\|\cdot\|$ buď libovolná přípustná norma, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2=1$

$$\|(x,y)\| = \|(\alpha - i\beta)(x,y)\| = \|(\alpha x+\beta y, \alpha y-\beta x)\|$$
$$\geq \|\alpha x+\beta y\| \quad (\text{viz důkaz (a)})$$
$$\Rightarrow \|(x,y)\| \geq \|(x,y)\|_{min}$$

(c) • X_C úplný $\Rightarrow (X_C)_R$ úplný, X je uzavřený podprostor $(X_C)_R$

• X úplný $\Rightarrow$ $(X\times X, \|\ \|_\infty)$, kde $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|,\|y\|\}$
je úplný, a to je izomorfní $(X_C)_R$, tedy X_C je úplný

(d) $X = C(K,\mathbb{R})$, $X=\ell_\infty(\Gamma,\mathbb{R})$, $X=c_0(\Gamma,\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \|(f,g)\|_{X_C} = \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1} \|\alpha f+\beta g\|_X =$$

$$= \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1}\sup_x |\alpha f(x)+\beta g(x)| = \sup_x \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1} |\alpha f(x)+\beta g(x)|$$

$$= \sup_x \sup_{\alpha^2+\beta^2\leq 1} |\langle (f(x),g(x)),(\alpha,\beta)\rangle_{\mathbb{R}^2}| = \sup_x \sqrt{f(x)^2+g(x)^2}$$

$$= \sup_x |f(x)+ig(x)| = \|f+ig\|_\infty$$