(a) Nechť X je NLP a Z jeho uzavřený podprostor.

Nechť $q: X \to X/Z$ je kanonické kvocientové zobrazení.

Definujme $T : (X/Z)^* \to X^*$ vzorcem $T(f) = f \circ q$. Pak T je lineární izometrie $(X/Z)^*$ na $Z^\perp \subset X^*$

Dk.:

- T je lineární zobrazení $(X/Z)^*$ do X^*

  $\ulcorner f \in (X/Z)^* \Rightarrow f \circ q \in X^*$, axiomy se ověří snadno$\lrcorner$

- $f \in (X/Z)^*$

  $\Rightarrow (Tf)(U_X) = f(q(U_X)) = f(U_{X/Z})$

  Tedy $\|Tf\| = \sup\{|Tf(x)| : x \in U_X\} = \sup\{|f([x])| : [x] \in U_{X/Z}\}$

  $= \|f\|$

  $\Rightarrow T$ je izometrie $(X/Z)^*$ do X^*

- T je do $Z^\perp$

  $\ulcorner f \in (X/Z)^*, \ x \in Z \Rightarrow (Tf)(x) = f(q(x)) = f(0) = 0$

  Tedy $Tf \in Z^\perp \lrcorner$

- T je na $Z^\perp$

  $\ulcorner g \in Z^\perp \Rightarrow$ definujme $f : X/Z \to \mathbb{F}$ vzorcem

  $$f([x]) = g(x), \quad [x] \in X/Z$$

  je to dobře def.:

  $[x] = [y] \Rightarrow x - y \in Z \Rightarrow g(x-y) = 0 \Rightarrow g(x) = g(y)$

  je to lineární ... ověří se axiomy

  je spojité: $|f([x])| = |f([y])| = |g(y)| \leq \|g\| \, \|y\|$

  pro každé $y \in [x]$

  $\Rightarrow |f([x])| \leq \|g\| \cdot \|[x]\| \Rightarrow \|f\| \leq \|g\|$

  $Tf = f \circ q = g$. $\lrcorner$

(b) $R : f \longmapsto f \restriction Z$ je kvocientové zobrazení X^* na Z^*

Tedy zobrazení $\tilde{R}$ z Tvrzení 12(b) je izometrie $X^*/Z^\perp$ na Z^*

<u>Dk:</u> • Zřejmě je R lineární zobrazení X^* do Z^*, $\|R\| \leq 1$, speciálně $R(U_{X^*}) \subset U_{Z^*}$

• $g \in U_{Z^*} \Rightarrow$ z H-B věty ex. $f \in X^*$, $\|f\| = \|g\|$, $f|_Z = g$

tedy $f \in U_{X^*}$, $Rf = g$

Tedy: $R(U_{X^*}) = U_{Z^*}$, tedy R je kvocientové dle poznámky za Tvrzením 12. Proto operátor

$\tilde{R} : X^*/Z^\perp \longrightarrow Z^*$ definovaný $\tilde{R}([f]) = Rf = f|_Z$

je izometrie $X^*/Z^\perp$ na Z^*

(uvědomme si, že $Z^\perp = \ker R$).