Appendix 3: **Částečně uspořádané množiny a Zornovo lemma**

Nechť A je nějaká množina a $\preceq$ je relace na A. Relace $\preceq$ se nazývá

- **částečné uspořádání**, pokud
  - $\forall x \in A : x \preceq x$,
  - $\forall x, y, z \in A : x \preceq y \;\&\; y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$,
  - $\forall x, y \in A : x \preceq y \;\&\; y \preceq x \Rightarrow x = y$;
- **úplné uspořádání** (nebo též **lineární uspořádání**), je-li to částečné uspořádání splňující navíc
  - $\forall x, y \in A : x \preceq y$ nebo $y \preceq x$;
- **dobré uspořádání**, je-li to úplné uspořádání a navíc má každá neprázdná podmnožina A $\preceq$-nejmenší prvek.

Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina a $B \subset A$. Množině B říkáme **řetězec**, pokud je úplně uspořádaná relací $\preceq$ (tj. pokud pro každé dva prvky $x, y \in B$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$).

Zornovo lemma. *Nechť $(A, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Předpokládejme, že každý řetězec v A má horní odhad, tj.*

$$\forall B \subset A \text{ řetězec } \exists x \in A\ \forall y \in B : y \preceq x.$$

Pak pro každé $x \in A$ existuje $y \in A$ splňující $x \preceq y$, které je $\preceq$-maximální, tj.

$$\forall z \in A : y \preceq z \Rightarrow y = z.$$

Příklady rutinního použití Zornova lemmatu

1. Nechť (M, d) je metrický prostor a $\varepsilon > 0$. Pak existuje maximální ε-diskrétní podmnožina M, tj. taková $C \subset M$, že pro každé dva různé prvky $x, y \in C$ je $d(x, y) \geq \varepsilon$ a přitom pro každé $z \in M$ existuje $x \in C$, že $d(x, z) < \varepsilon$.

Důkaz. Označme symbolem $\mathcal{A}$ množinu všech ε-diskrétních podmnožin M. Pro $B, C \in \mathcal{A}$ definujme $B \preceq C$, jestliže $B \subset C$. Pak $(\mathcal{A}, \preceq)$ je částečně uspořádaná množina. Je-li $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ řetězec, je jeho sjednocení $R = \bigcup \mathcal{R}$ horním odhadem $\mathcal{R}$. (K tomu je potřeba ukázat, že $R \in \mathcal{A}$, nerovnosti jsou pak zřejmé. Abychom ukázali, že $R \in \mathcal{A}$, vezměme $x, y \in R$. Protože $R = \bigcup \mathcal{R}$, existují $B, C \in \mathcal{R}$, že $x \in B$ a $y \in C$. Protože $\mathcal{R}$ je řetězec, je $B \subset C$ nebo $C \subset B$. Dejme tomu, že $B \subset C$. Pak $x, y \in C$. Protože C je ε-diskrétní, je $d(x, y) \geq \varepsilon$.) Protože $\emptyset \in \mathcal{A}$, z Zornova lemmatu plyne existence maximálního prvku.

2. Nechť (M, d) je metrický prostor a $\varepsilon > 0$. Pak existuje systém $\mathcal{U}$ s vlastnostmi:

- Prvky $\mathcal{U}$ jsou otevřené podmnožiny M diametru $< \varepsilon$.
- Prvky $\mathcal{U}$ jsou po dvou disjunktní.
- Sjednocení $\bigcup \mathcal{U}$ je hustá podmnožina M.

Návod k důkazu: Nechť $\mathcal{A}$ je množina všech systémů $\mathcal{U}$ splňujících první dvě podmínky. Pro dva prvky $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}$ nechť $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, pokud $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Ověřte předpoklady Zornova lemmatu a dokažte, že maximální prvek musí splňova třetí podmínku.

3. Existuje systém $\mathcal{U}$ s vlastnostmi:

- Prvky $\mathcal{U}$ jsou nekonečné podmnožiny $\mathbb{N}$.
- Pokud $B, C \in \mathcal{U}$ jsou různé, je $A \cap B$ konečná.
- Pro každou $A \subset \mathbb{N}$ nekonečnou existuje $B \in \mathcal{U}$ taková, že $A \cap B$ je nekonečná.

Návod k důkazu: Stejný jako v případě 2.

4. Nechť (Ω, Σ, μ) je prostor s nezápornou mírou. Pak existuje systém $\mathcal{U}$ s vlastnostmi:
   - $\mathcal{U} \subset \Sigma$ a pro každou $A \in \mathcal{U}$ je $0 < \mu(A) < \infty$.
   - Pokud $B, C \in \mathcal{U}$ jsou různé, je $\mu(A \cap B) = 0$.
   - Pro každou $A \in \Sigma$ splňující $0 < \mu(A) < \infty$ existuje $B \in \mathcal{U}$ taková, že $\mu(A \cap B) > 0$.

Návod k důkazu: Stejný jako v případě 2.

Poznámky k důkazu Zornova lemmatu.

Zornovo lemma je důsledkem axiomu výběru, je s ním ve skutečnosti ekvivalentní, stejně jako například Zermelova věta o dobrém uspořádání.

Axiom výběru. *Nechť I je neprázdná množina a $(A_i)_{i \in I}$ je indexovaný systém neprázdných množin. Pak existuje zobrazení f definované na množině I takové, že pro každé $i \in I$ je $f(i) \in A_i$.*

Zermelova věta o dobrém uspořádání. *Každou množinu lze dobře uspořádat. Tj. na každé množině existuje relace, která je dobrým uspořádáním.*

Axiom výběru plyne z Zermelovy věty: Uvažme množinu $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Zvolme na ní dobré uspořádání $\preceq$. Položme $f(i) = \preceq - \min A_i$ pro $i \in I$.

Zermelova věta plyne z Zornova lemmatu: Nechť A je množina. Označme $\mathcal{A}$ množinu všech dvojic $(B, \preceq_B)$, kde $B \subset A$ a $\preceq_B$ je dobré uspořádání na B. Definujme na $\mathcal{A}$ částečné uspořádání $(B, \preceq_B) \preceq (C, \preceq_C)$, pokud platí

- $B \subset C$,
- pro $x, y \in B$ je $x \preceq_B y$, právě když $x \preceq_C y$,
- je-li $x \in B$, $y \in C$ a $y \preceq_C x$, pak $y \in B$.

Pak jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu a maximálním prvkem je $(A, \preceq_A)$ pro nějaké dobré uspořádání na A.

Zornovo lemma plyne z axiomu výběru, ale důkaz je obtížnější, protože používá transfinitní rekurzi. Základní schéma je následující: Postupuje se sporem. Nechť $(A, \preceq)$ splňuje předpoklady Zornova lemmatu, ale neexistuje maximální prvek nad prvkem $a \in A$. Nechť I je množina všech řetězců obsahujících bod a. Z axiomu výběru plyne existence funkce $f : I \to A$ takové, že pro každé $R \in I$ a každé $x \in R$ je $x \prec f(R)$. Nyní se transfinitní rekurzí pro každé ordinální číslo α zkonstruuje funkce $g_\alpha : \alpha = [0, \alpha) \to A$ takto:

- $g_1(0) = \{a\}$;
- $g_{\alpha+1}(\alpha) = g_\alpha[[0, \alpha)] \cup f(g_\alpha[[0, \alpha)])$, $g_{\alpha+1}|_{[0,\alpha)} = g_\alpha$;
- Je-li α limitní, pak $g_\alpha(\gamma) = g_{\gamma+1}(\gamma)$ pro $\gamma < \alpha$.

Protože A je množina, musí se konstrukce někdy zastavit, což dává spor.