## III. Duální a adjungované operátory

**1.** Ukažte, že $T \in L(X,Y)$ a vyjádřete duální operátor $T' \in L(Y^*, X^*)$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů:
a) $X = (\mathbb{F}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{F}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_1-x_2, 2x_1+x_2)$.
Napište i reprezentující matice $T$ a $T'$.
b) $X = (\mathbb{C}^2, \|\cdot\|_2)$, $Y = (\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_2)$, $T(x_1,x_2) = (x_1+ix_2, (1+i)x_1-x_2, x_1-2ix_2)$.
Napište i reprezentující matice $T$ a $T'$.
c) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$; d) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
e) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1, ix_2, x_3, ix_4, \dots)$; f) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$;
g) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1-x_2, x_2-2x_1, x_3, x_4, \dots)$; h) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{1+i}{n}x_n)_{n=1}^\infty$;
i) $X = \ell^1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\frac{x_1+\dots+x_n}{n})_{n=1}^\infty$; j) $X = \ell^1$, $Y = c_0$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^\infty x_k)_{n=1}^\infty$;
k) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
l) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f)(t) = tf(t)$;
m) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T(f) = \chi_{[0,\frac12]} \cdot f$;
n) $X = L^1([0,2\pi])$, $Y = c_0$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt \,\mathrm{d}t)_{k=1}^\infty$;
o) $X = L^2([0,2\pi])$, $Y = \ell^2$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt \,\mathrm{d}t)_{k=1}^\infty$;
p) $X = L^2([0,2\pi])$, $Y = \ell^2(\mathbb{Z})$, $T(f) = (\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \,\mathrm{d}t)_{k\in\mathbb{Z}}$;
q) $X = \ell^1$, $Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1,\infty)$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$, $t \in [0,1]$.
r) $X = \ell^1$, $Y = C([0,1])$, $T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n t^n$, $t \in [0,1]$.
s) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$; t) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = \int_0^t f$;
u) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = tf(t)$; v) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = f(1-t)$;
x) $X = Y = \mathcal{C}([-1,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$. y) $X = \mathcal{C}([-1,1])$, $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f|_{[0,1]}$.

**2.** V těch případech z Příkladu 1, kde jde o zobrazení mezi Hilbertovými prostory, tj. v případech a)–h), k)–m) pro $p = 2$, o), p), napište vzorec adjungovaného operátoru $T^*$. V případech a),b) napište i jeho reprezentující matici.

---

Výsledky a návody. **1.** Důkaz, že $T \in L(X,Y)$, je většinou standardní, odhad normy se často počítal již v sadě I. Pouze v případech n),o),p) je třeba použít znalosti z teorie Fourierových řad. Dále uvádím vyjádření duálních operátorů. a) Matice reprezentující $T$ (při sloupcovém zápisu): $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $T' : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$, $T'(y_1,y_2,y_3) = (y_1+y_2+2y_3, y_1-y_2+y_3)$, reprezentující matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Matice reprezentující $T$: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1+i & -1 \\ 1 & -2i \end{pmatrix}$; $T' : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $T'(y_1,y_2,y_3) = (y_1 + (1+i)y_2 + y_3, iy_1 - y_2 - 2iy_3)$, reprezentující matice $\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1 \\ i & -1 & -2i \end{pmatrix}$. c) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$. d) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (0, y_1, y_2, \dots)$. e) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (y_1, iy_2, y_3, iy_4, \dots)$. f) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (0, y_2, 0, y_4, \dots)$. g) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (y_1 - 2y_2, y_2 - y_1, y_3, y_4, \dots)$. h) $T' : \ell^2 \to \ell^2$, $T'((y_n)) = (\frac{1+i}{n} y_n)_{n=1}^\infty$. i) $T' : \ell^1 \to \ell^\infty$, $T'((y_n)) = (\sum_{k=n}^\infty \frac{y_k}{k})_{n=1}^\infty$. j) $T' : \ell^1 \to \ell^\infty$, $T'((y_n)) = (\sum_{k=1}^n y_k)_{n=1}^\infty$. k) $T' : L^q([0,1]) \to L^q([0,1])$, kde $q \in (1,\infty]$ splňuje $\frac1p + \frac1q = 1$, $T'(g)(t) = 2tg(t^2)$. (Použije se věta o substituci.) l) $T' : L^q([0,1]) \to L^q([0,1])$, kde $q \in (1,\infty]$ splňuje $\frac1p + \frac1q = 1$, $T'(g)(t) = tg(t)$. m) $T' : L^q([0,1]) \to L^q([0,1])$, kde $q \in (1,\infty]$ splňuje $\frac1p + \frac1q = 1$, $T'(g) = \chi_{[0,\frac12]} \cdot g$. n) $T' : \ell^1 \to L^\infty([0,2\pi])$, $T'((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n \cos nt$ (řada konverguje absolutně v $L^\infty([0,2\pi])$, obor hodnot $T'$ je obsažen v $\mathcal{C}([0,2\pi])$, řadu lze uvažovat jako stejnoměrně konvergující na $[0,2\pi]$). o) $T' : \ell^2 \to L^2([0,2\pi])$, $T'((y_n))(t) = \sum_{n=1}^\infty y_n \cos nt$. (Řada nekonverguje bodově, ale v normě prostoru $L^2([0,2\pi])$. Výpočet je stejný jako v bodě n), ale zdůvodnění jeho správnosti je náročnější – je třeba použít, že pro každé $g \in L^2([0,2\pi])$ je operátor $f \mapsto gf$ spojitý z $L^2([0,2\pi])$ do $L^1([0,2\pi])$, což plyne z Cauchy-Schwarzovy nerovnosti; a fakt, že $f \mapsto \int_0^{2\pi} f$ je spojitý lineární funkcionál na $L^1([0,2\pi])$ ke správné práci s řadami.) p) $T' : \ell^2 \to L^2([0,2\pi])$, $T'((y_n))(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n e^{-int}$. (Opět jde o konvergenci v prostoru $L^2([0,2\pi])$,

výpočet i zdůvodnění jsou stejné jako v bodě o). q) $T' : L^q([0,1]) \to \ell^\infty$, kde $q \in (1,\infty]$ splňuje $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $T'(g) = (\int_0^1 g(t)t^n \,\mathrm{d}t)_{n=1}^\infty$. r) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \ell^\infty$, $T'(\mu) = (\int_{[0,1]} t^n \,\mathrm{d}\mu(t))_{n=1}^\infty$. s) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])$, $T'(\mu) = \mu + \mu([0,1])(\delta_1 - \delta_0)$ ($\delta_t$ označuje Diracovu míru nesenou bodem $t$). t) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])$, $T'(\mu)(A) = \int_A \mu([t,1]) \,\mathrm{d}t$ pro $A \subset [0,1]$ borelovskou (použijte se Fubiniova věta a vyjádření integrálu podle míry s danou hustotou). u) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])$, $T'(\mu)(A) = \int_A t \,\mathrm{d}\mu(t)$ pro $A \subset [0,1]$ borelovskou (použijte se vyjádření integrálu podle míry s danou hustotou). v) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])$, $T'(\mu)(A) = \mu(\{t \in [0,1]; 1-t \in A\})$ pro $A \subset [0,1]$ borelovskou (tj. $T'(\mu)$ je obraz míry $\mu$ při zobrazení $t \mapsto 1-t$, používá se věta o integrálu podle obrazu míry). x) $T' : \mathcal{M}([-1,1]) \to \mathcal{M}([-1,1])$, $T'(\mu)(A) = \mu(\{t \in [-1,1]; t^2 \in A\})$ pro $A \subset [-1,1]$ borelovskou (tj. $T'(\mu)$ je obraz míry $\mu$ při zobrazení $t \mapsto t^2$, používá se věta o integrálu podle obrazu míry). y) $T' : \mathcal{M}([0,1]) \to \mathcal{M}([-1,1])$, $T'(\mu)(A) = \mu(A \cap [0,1])$ pro $A \subset [-1,1]$ borelovskou. **2.** V případech a),c),d),f),g),k),l),m),o) je vzorec pro $T^*$ stejný jako vzorec pro $T'$ uvedený výše. Ve zbývajících čtyřech případech je vzorec odlišný: b) $T^* : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $T^*(y_1,y_2,y_3) = (y_1 + (1-i)y_2 + y_3, -iy_1 - y_2 + 2iy_3)$, reprezentující matice $\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1 \\ -i & -1 & 2i \end{pmatrix}$. e) $T^* : \ell^2 \to \ell^2$, $T^*((y_n)) = (y_1, -iy_2, y_3, -iy_4, \dots)$. h) $T^* : \ell^2 \to \ell^2$, $T^*((y_n)) = (\frac{1-i}{n} y_n)_{n=1}^\infty$. p) $T^* : \ell^2 \to L^2([0,2\pi])$, $T^*((y_n))(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n e^{int}$.