I. Normy lineárních funkcionálů a operátorů

1. Nechť c_{00} označuje vektorový prostor všech číselných posloupností, které jsou od jistého indexu konstantně nulové. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$ Definujme na c_{00} lineární funkcionál φ_α předpisem

$$\varphi_\alpha((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x_n.$$

Pro které hodnoty $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in [1, \infty]$ je funkcionál φ_α spojitý na $(c_{00}, \|\cdot\|_p)$?

2. Ukažte, že $\varphi : X \to \mathbb{F}$ je spojitý lineární funkcionál, spočtěte jeho normu a najděte množinu všech bodů na sféře prostoru X, v nichž φ své normy nabývá (a rozhodněte, zda je neprázdná), jestliže

a) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$; b) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}$;
c) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$; d) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$;
e) $X = \ell^1$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_{2n}$; f) $X = c_0$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$;
g) $X = \ell^\infty$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x_n$; h) $X = \ell^2$, $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$;
i) $X = \ell^p$ (kde $p \in (1, \infty)$), $\varphi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n$; j) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = f(0)$;
k) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = f(0) - f(1)$; l) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 f$; m) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$;
n) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; o) $X = \mathcal{C}([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$;
p) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$; q) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$;
r) $X = L^\infty([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$; s) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^{1/2} f$;
t) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$; u) $X = L^1([0,1])$, $\varphi(f) = \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Ukažte, že $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor, spočtěte jeho normu a najděte množinu všech bodů $x \in S_X$, v nichž $\|Tx\| = \|T\|$ (a rozhodněte, zda je neprázdná), jestliže

a) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_1, x_2, \dots)$; b) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
c) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)$;
d) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (x_1 - x_2, x_2 - 2x_1, x_3, x_4, \dots)$; e) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$;
f) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{x_n}{n})_{n=1}^{\infty}$; g) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n+1}{n} x_n)_{n=1}^{\infty}$;
h) $X = Y = \ell^2$, $T((x_n)) = (\frac{n}{n+1} x_n)_{n=1}^{\infty}$; i) $X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T((x_n)) = (x_1 + \cdots + x_n)_{n=1}^{\infty}$;
j) $X = \ell^1$, $Y = \ell^\infty$, $T((x_n)) = (\sum_{k=n}^{\infty} x_k)_{n=1}^{\infty}$; k) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f + f(1) - f(0)$;
l) $X = Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f$; m) $X = Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = t f(t)$;
n) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2}) f(t)$; o) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = f(1 - t)$;
p) $X = Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$; q) $X = Y = \mathcal{C}([-1,1])$, $T(f)(t) = f(t^2)$;
r) $X = \mathcal{C}([0,r])$ a $Y = \mathcal{C}^1([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f)(t) = \int_0^t f$;
s) $X = \mathcal{C}^1([0,r])$ a $Y = \mathcal{C}([0,r])$, kde $r > 0$, $T(f) = f'$;
t) $X = \mathcal{C}^1([0,1])$ a $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f' - f$;
u) $X = \mathcal{C}^2([0,1])$ a $Y = \mathcal{C}([0,1])$, $T(f) = f'' + f$;
v) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = f(\sqrt{t})$;
w) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = t f(t)$;
x) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f)(t) = (t - \frac{1}{2}) f(t)$;
y) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} \cdot f$;
z) $X = Y = L^p([0,1])$, kde $p \in [1, \infty]$, $T(f) = (\chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{(\frac{1}{2},1]}) \cdot f$.

4. Pro operátory T z předchozího příkladu zodpovězte následující otázky:
(i) Je operátor T prostý? Pokud ne, zjistěte jeho jádro.
(ii) Je operátor T na?
(iii) Je operátor T izometrie, případně izomorfismus?
(iv) Je-li T izometrie nebo izomorfismus, popište jeho obor hodnot.
(v) Je-li operátor T izomorfismus, spočtěte normu inverzního operátoru.