ÚVOD DO FUNKCIONÁLNÍ ANALÝZY

PŘÍKLADY PRO POROZUMĚNÍ LÁTCE – ZS 2015/2016

PŘÍKLADY KE KAPITOLE II

K oddílu II.1 – sublineární funkcionály, pseudonormy, Hahn-Banachova věta

Příklad 1. Nechť X je reálný vektorový prostor.

(1) Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X. Ukažte, že $\max\{f_1, \dots, f_n\}$ je sublineární funkcionál na X.

(2) Nechť p je sublineární funkcionál na X. Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{f(x); f \text{ je lineární funkcionál na } X, f \leq p\}.$$

`Návod:` *(2) Použijte algebraickou Hahn-Banachovu větu, tj. Větu II.1 z přednášky.*

Příklad 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$.

(1) Nechť $f_1, \dots, f_n$ jsou lineární funkcionály na X. Ukažte, že $\max\{|f_1|, \dots, |f_n|\}$ je pseudonorma na X.

(2) Nechť p je pseudonorma na X. Ukažte, že pro každé $x \in X$ platí

$$p(x) = \max\{|f(x)|; f \text{ je lineární funkcionál na } X, |f| \leq p\}.$$

`Návod:` *(2) Použijte Důsledek II.4 z přednášky.*

Příklad 3. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X^*$ je omezená množina.

(1) Ukažte, že

$$p_A(x) = \sup\{\operatorname{Re} f(x); f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitý sublineární funkcionál na X.

(2) Ukažte, že

$$q_A(x) = \sup\{|f(x)|; f \in A\}, \quad x \in X,$$

je spojitá pseudonorma na X.

(3) Nechť 0 je vnitřním bodem množiny A. Ukažte, že q_A je ekvivalentní norma na X.

`Návod:` *(1,2) Spojitost ukažte tak, že ukážete lipschitzovskost.*

Příklad 4. Nechť X je normovaný lineární prostor a U otevřená konvexní množina obsahující 0. Ukažte, že existuje právě jeden sublineární funkcionál p na X, pro který platí $U = \{x \in X; p(x) < 1\}$. Ukažte, že p je spojitý.

`Návod:` *Uvažte $p(x) = \inf\{t > 0; \frac{x}{t} \in U\}$.*

Příklad 5. Dokažte Větu II.5 z přednášky (tj. Hahn-Banachovu větu o rozšiřování spojitých lineárních funkcionálů) pro reálné separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

`Návod:` *Použijte existenci spočetné husté množiny, Lemma II.2 a Větu I.15.*

Příklad 6. Dokažte Větu II.5 z přednášky pro komplexní separabilní normované prostory bez použití Zornova lemmatu.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad na reálnou část funkcionálu a Tvrzení I.47(d) z přednášky.*

Příklad 7. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a $T : Y \to \ell^\infty(\Gamma)$ spojitý lineární operátor. Ukažte, že existuje lineární operátor $\widetilde{T} : X \to \ell^\infty(\Gamma)$, který rozšiřuje T a pro něž platí $\left\|\widetilde{T}\right\| = \|T\|$.

`Návod:` *Použijte Hahn-Banachovu větu na funkcionály $x \mapsto Tx(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

Příklad 8. Nechť X je normovaný lineární prostor, Y jeho podprostor a Z normovaný prostor konečné dimenze. Ukažte, že každý operátor $T \in L(Y, Z)$ lze rozšířit na operátor $\widetilde{T} \in L(X, Z)$.

`Návod:` *Použijte předchozí příklad a ekvivalenci norem na prostorech konečné dimenze.*

Příklad 9. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a p je spojitý sublineární funkcionál na X. Nechť f je lineární funkcionál na X splňující $\operatorname{Re} f \leq p$. Ukažte, že f je spojitý.

`Návod:` *Ukažte, že $\operatorname{Re} f$ je omezená na B_X. Odtud odvoďte, že $\operatorname{Re} f$ je spojitý, a tedy i f je spojitý (například s využitím Tvrzení I.47).*

Příklad 10. Ukažte, že na prostoru $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ existuje Banachova limita, tj. spojitý lineární funkcionál L s vlastnostmi:

- $L((x_n)) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, pokud limita existuje.
- Pokud $x_n \leq y_n$ pro všechna n, pak $L((x_n)) \leq L((y_n))$.
- $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = L(x_2, x_3, x_4, \dots)$ pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$.

`Návod:` *Použijte Větu II.1 z přednášky na funkcionál $(x_n) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ na c (tj. na podprostoru tvořeném konvergentními posloupnostmi) a sublineární funkcionál $p((x_n)) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.*

Příklad 11. Ukažte, že Banachova limita z předchozího příkladu nemůže splňovat $L((x_n y_n)) = L(x_n)L(y_n)$ pro každou dvojici $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$.

`Návod:` *Ukažte, že nutně $L(1, 0, 1, 0, \dots) = \frac{1}{2}$.*

Příklad 12. Nechť H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ jeho podprostor. Ukažte, že pro každý funkcionál $f \in Y^*$ existuje právě jeden funkcionál $g \in H^*$ stejné normy, který rozšiřuje f.

`Návod:` *Ukažte, že nutně $g = 0$ na $Y^\perp$.*

Příklad 13. Najděte podprostor $Y \subset \ell^1$ a $f \in Y^*$, pro který existují dvě různá rozšíření na ℓ^1, která mají stejnou normu.

Příklad 14. Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Ukažte, že $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}} A$.

`Návod:` *Použijte Důsledek II.9 z přednášky.*

Příklad 15. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(1) Ukažte, že, je-li X^* separabilní, je i X separabilní.
(2) Nechť X je separabilní. Musí být i X^* separabilní?

Návod: *(1) Nechť $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v X^* a neobsahuje nulu. Pro každé n nechť $x_n \in X$ je takové, že $f_n(x_n) \neq 0$. Pomocí předchozího příkladu ukažte, že $\overline{\operatorname{span}}\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = X$, a z toho odvoďte separabilitu. (2) Použijte konkrétní podobu duálních prostorů z oddílu II.4 z přednášky.*

K oddílu II.2 – podprostory a kvocienty

Příklad 16. Nechť X je normovaný lineární prostor, Z jeho uzavřený podprostor a $q : X \to X/Z$ kanonické kvocientové zobrazení. Připomeňme, že Větička II.11 z přednášky říká, že $q(U_X) = U_{X/Z}$. Ukažte, že $q(B_X) = B_{X/Z}$, právě když pro každé $x \in X$ existuje k němu nejbližší bod v Z.

Příklad 17. Nechť $X = \mathcal{C}([0,1])$ a $Z = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); f = 0 \text{ na } [0, \frac{1}{2}]\}$.

(1) Pro $f \in X$ spočtěte $\operatorname{dist}(f, Z)$. Existuje nebližší bod?
(2) Ukažte, že X/Z je izometrické $\mathcal{C}([0, \frac{1}{2}])$ a popište tuto izometrii.

Návod: *Ukažte, že zobrazení $f \mapsto f|_{[0,\frac{1}{2}]}$ je kvocientové.*

Příklad 18. $X = \mathcal{C}([0,1])$ a $Z = \{f \in \mathcal{C}([0,1]); f(\frac{1}{n}) = 0 \text{ pro } n \in \mathbb{N}\}$.

(1) Pro $f \in X$ spočtěte $\operatorname{dist}(f, Z)$. Existuje nejbližší bod?
(2) Ukažte, že X/Z je izometrické prostoru c a popište tuto izometrii.

Příklad 19. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c_0.

(1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \limsup_{n\to\infty} |x_n|$.
(2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c_0 k němu nejbližší.
(3) Je nebližší bod určen jednoznačně?

Příklad 20. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c pro reálné prostory. (Prostor c byl definován v Příkladu I.6.)

(1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \frac{1}{2}\operatorname{osc}((x_n))$, kde
$$\operatorname{osc}((x_n)) = \inf_{n_0 \in \mathbb{N}} \sup_{m,n \geq n_0} |x_m - x_n| .$$
(2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c k němu nejbližší.
(3) Je nebližší bod určen jednoznačně?

Návod: *Ukažte, že $\operatorname{osc}((x_n)) = \limsup_{n\to\infty} x_n - \liminf_{n\to\infty} x_n$, nejbližším bodem bude vhodná posloupnost (y_n) splňující $\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}(\limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} x_n)$.*

Příklad 21. Nechť A je neprázdná omezená podmnožina $\mathbb{C}$.

(1) Ukažte, že existuje
$$r(A) = \min\{\rho \geq 0; \exists \lambda \in \mathbb{C} : A \subset B(\lambda, \rho).$$
Zde $B(\lambda, 0) = \{\lambda\}$. ($r(A)$ je Čebyševův poloměr množiny A.)
(2) Ukažte, že existuje právě jedno $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $A \subset B(\lambda, r(A))$. (Toto λ je Čebyševův střed množiny A.)

Návod: *(1) Nechť r značí infimum. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ zvolme $\lambda_n \in \mathbb{C}$, že $A \subset B(\lambda_n, r + \frac{1}{n})$. Ukažte, že posloupnost (λ_n) je omezená, a je-li λ hromadný bod, pak $A \subset B(\lambda, r)$. (2) Nechť $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $s = |\lambda - \mu| > 0$. Ukažte, že pro každé $r \geq \frac{s}{2}$ je $B(\lambda, r) \cap B(\mu, r) \subset B(\frac{1}{2}(\lambda + \mu), \sqrt{r^2 - (s/2)^2})$.*

Příklad 22. Uvažujme kvocient ℓ^∞/c pro komplexní prostory. (Prostor c byl definován v Příkladu I.6.)

(1) Ukažte, že pro každé $(x_n) \in \ell^\infty$ je $\|[(x_n)]\| = \inf_{n\in\mathbb{N}} r(\{x_m; m \geq n\})$.
(2) Ukažte, že pro každé $x \in \ell^\infty$ existuje prvek c k němu nejbližší.
(3) Je nebližší bod určen jednoznačně?

`Návod:` *(2) Označme $r_n = r(\{x_m; m \geq n\})$ a $r = \inf_n r_n = \lim_n r_n$. Nechť $\lambda_n \in \mathbb{C}$ je Čebyševův střed množiny $\{x_m; m \geq n\}$. Ukažte, že posloupnost (λ_n) konverguje k nějakému $\lambda \in \mathbb{C}$ a že nejbližším bodem je vhodná posloupnost s limitou λ.*

Příklad 23. Nechť $\mathcal{B}_b([0,1])$ a $\mathcal{L}_b([0,1])$ jsou prostory omezených borelovských resp. lebesgueovsky měřitelných funkcí definované v Příkladu I.8. Nechť Z je podprostor $\mathcal{L}_b([0,1])$ tvořený funkcemi skoro všude rovnými nule.

(1) Ukažte, že Z je uzavřený podprostor $\mathcal{L}_b([0,1])$.
(2) Pro $f \in \mathcal{L}_b([0,1])$ spočtěte $\operatorname{dist}(f, Z)$.
(3) Pro $f \in \mathcal{B}_b([0,1])$ spočtěte $\operatorname{dist}(f, Z \cap \mathcal{B}_b([0,1]))$. Je tato vzdálenost stejná jako $\operatorname{dist}(f, Z)$?
(4) Ukažte, že kvocienty $\mathcal{L}_b([0,1])/Z$ i $\mathcal{B}_b([0,1])/(Z \cap \mathcal{B}_b([0,1]))$ jsou izometrické prostoru $L^\infty([0,1])$.

K oddílu II.3 – vnoření do druhého duálu a reflexivita

Příklad 24. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Připomeňme, že X_R je jeho reálná verze a že zobrazení $\phi : (X^*)_R \to (X_R)^*$ definované předpisem $\phi(f)(x) = \operatorname{Re} f(x)$ $(f \in (X^*)_R,\ x \in X_R)$ je dle Tvrzení I.47 z přednášky lineární izometrie mezi reálnými Banachovými prostory $(X^*)_R$ a $(X_R)^*$. Pro $F \in (X^{**})_R$ definujme zobrazení $\psi(F) : (X_R)^* \to \mathbb{R}$ předpisem $\psi(F)(g) = \operatorname{Re} F(\phi^{-1}(g))$ pro $g \in (X_R)^*$.

(1) Ukažte, že ψ je lineární izometrie $(X^{**})_R$ na $(X_R)^{**}$.
(2) Ukažte, že $\psi \circ \varkappa_X = \varkappa_{X_R}$ (kde $\varkappa_X$ je kanonické vnoření X do X^{**} uvažované jako zobrazení mezi reálnými prostory X_R a $(X^{**})_R$).
(3) Ukažte, že X je reflexivní, právě když X_R je reflexivní.

Příklad 25. Nechť K je nekonečný kompaktní metrický prostor.

(1) Ukažte, že v K existuje prostá konvergentní posloupnost.
(2) Ukažte, že pro každé $x \in K$ vzorec $\delta_x(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{C}(K)$, definuje spojitý lineární funkcionál normy 1.
(3) Ukažte, že pro $x_1, \dots, x_n \in K$ různé a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ platí
$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j \delta_{x_j} \right\| = \sum_{j=1}^n |c_j| .$$
(4) Nechť (x_n) je posloupnost z bodu (1) s limitou $x \in K$. Uvažme
$$Y = \operatorname{span}\{\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots\} \subset \mathcal{C}(K)^*.$$
Ukažte, že prvky $\delta_x, \delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots$ jsou lineárně nezávislé a že funkcionál $\varphi : Y \to \mathbb{F}$, který prvku Y přiřadí jeho koeficient u δ_x, je spojitý na Y (a má normu 1).
(5) Ukažte, že žádné rozšíření φ na $\mathcal{C}(K)^*$ (tj. na prvek $\mathcal{C}(K)^{**}$) nepatří do $\varkappa(\mathcal{C}(K))$ a z toho odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

`Návod:` *(3) Pro důkaz nerovnosti $\geq$ využijte Lemma II.26 z přednášky. Nechť d je metrika na K. Najděte $r > 0$, že $B_d(x_j, r)$, $j = 1, \dots, n$ jsou disjunktní, a s využitím bodu (b) lemmatu najděte funkci $f \in \mathcal{C}(K)$ takovou, že $\|f\|_\infty = 1$ a $c_j f(x_j) = |c_j|$ pro $j = 1, \dots, n$. (4) Lineární nezávislost odvoďte z (3), stejně jako normu φ. (5) Nechť rozšíření je tvaru $\varkappa(f)$. Spočtěte hodnoty f v bodech x a x_k, $k \in \mathbb{N}$, a ukažte, že f nemůže být spojitá.*

Příklad 26. Nechť K je nekonečný kompaktní metrický prostor, posloupnost (x_n) a x nechť jsou jako v předchozím příkladu. Ukažte, že funkcionál $\varphi = \delta_x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\delta_{x_n}$ má normu 2 a své normy nenabývá. Odtud znovu odvoďte, že $\mathcal{C}(K)$ není reflexivní.

`Návod:` *Pro výpočet normy použijte bod (3) předchozího příkladu. Předpokládejme, že norma se nabývá v nějaké funkci $f \in B_{\mathcal{C}(K)}$. Ukažte, že f nemůže být spojitá v bodě x.*

K oddílu II.4 – reprezentace duálních prostorů

Příklad 27. Ukažte, že c_0^{**} je izometrický ℓ^∞ a že kanonickému vnoření odpovídá identické zobrazení c_0 do ℓ^∞.

`Návod:` *Použijte Větu II.21.*

Příklad 28. Nechť c je prostor konvergentních posloupností z Příkladu I.6. Ukažte, že c^* je izometrický ℓ^1 a příslušnou izometrii popište.

`Návod:` *Uvažte zobrazení $T : \ell^1(\mathbb{N}\cup\{\infty\}) \to c^*$ definované předpisem $T(f)((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)x_k + f(\infty)\cdot \lim\limits_{k\to\infty} x_k$.*

Příklad 29. Nechť Γ je nespočetná množina. Pro každou z níže uvedených σ-algeber Σ a měr μ popište prostory $L^1(\Gamma,\Sigma,\mu)$, $L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu)$ a $(L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$. V kterých případech je zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu) \to (L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$ z Věty II.23 z přednášky izometrie a v kterých případech je na?

(1) Σ jsou všechny podmnožiny Γ, μ je počítací míra (tj. pro konečné množiny dává počet prvků, pro nekonečné množiny dává ∞).
(2) $\Sigma = \{A \subset \Gamma; A$ je spočetná nebo $\Gamma \setminus A$ je spočetná$\}$, μ je zúžení počítací míry na Σ.
(3) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = \infty$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
(4) Σ je jako v bodě (2), $\mu(A) = 0$ pro spočetnou A a $\mu(A) = 1$, pokud $\Gamma \setminus A$ je spočetná.
(5) Σ jsou všechny podmnožiny Γ, $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(A) = \infty$ pro $A \neq \emptyset$.

Příklad 30. Nechť (Ω,Σ,μ) je prostor s mírou. Uvažme zobrazení $\Phi : L^\infty(\Gamma,\Sigma,\mu) \to (L^1(\Gamma,\Sigma,\mu))^*$ z Věty II.23.

(1) Ukažte, že Φ je izometrie do, právě když platí podmínka
$$\forall A \in \Sigma, \mu(A) > 0 \exists B \in \Sigma : B \subset A \;\&\; 0 < \mu(B) < \infty.$$
(Takové míře se říká polokonečná.)
(2) Ukažte na protipříkladu, že ani pro případ polokonečné míry nemusí být Φ na.
(3) Předpokládejme, že μ je polokonečná a navíc každá množina $A \subset \Omega$ taková, že $A \cap B \in \Sigma$ pro každou $B \in \Sigma$ konečné míry, sama patří do Σ. Ukažte, že pak je Φ na.
(4) Ukažte, že pro úplnou míru μ platí v předchozím bodě i opačná implikace.

`Návod:` *(1) Použijte metodu příslušné části důkazu Věty II.23. (2) Použijte vhodný bod předchozího příkladu. (3) Modifikujte důkaz pro σ-konečný případ. (4) Nechť $\Sigma' = \{A \subset \Omega; A \cap B \in \Sigma$ pro každou $B \in \Sigma$ konečné míry$\}$. Ukažte, že Σ' je σ-algebra, že μ lze rozšířit na Σ', $L^1(\Sigma) = L^1(\Sigma')$, ale $L^\infty(\Sigma) \subsetneqq L^\infty(\Sigma')$, pokud $\Sigma \subsetneqq \Sigma'$.*

Příklad 31. Uvažme zobrazení $\Psi : \mathcal{B}_b([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])^*$ a $\Upsilon : \ell^\infty([0,1]) \to \mathcal{M}([0,1])^*$ daná předpisem

$$\Psi(f)(\mu) = \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{B}_b([0,1]), \mu \in \mathcal{M}([0,1]);$$
$$\Upsilon(f)(\mu) = \sum_{t\in[0,1]} f(t)\cdot\mu(\{t\}), \quad f \in \ell^\infty([0,1]), \mu \in \mathcal{M}([0,1]).$$

(1) Ukažte, že Ψ je lineární izometrie $\mathcal{B}_b([0,1])$ do $\mathcal{M}([0,1])^*$.
(2) Ukažte, že zúžení Ψ na $\mathcal{C}([0,1])$ odpovídá kanonickému vnoření $\mathcal{C}([0,1])$ do druhého duálu (při identifikaci $\mathcal{C}([0,1])^*$ s $\mathcal{M}([0,1])$ dle Věty II.27).
(3) Ukažte, že Υ je lineární izometrie $\ell^\infty([0,1])$ do $\mathcal{M}([0,1])^*$.
(4) Ukažte, že $\ell^\infty_c([0,1]) \subset \mathcal{B}_b([0,1])$ a že pro $f \in \ell^\infty_c([0,1])$ je $\Psi(f) = \Upsilon(f)$.
(5) Ukažte, že $\Psi(1)$ není v oboru hodnot Υ.
(6) Ukažte, že $\Upsilon(1)$ není v oboru hodnot Ψ.
(7) Ukažte, že $(\Psi(\mathcal{B}_b([0,1])))_\perp = \{0\}$ a popište $(\Upsilon(\ell^\infty([0,1])))_\perp$.

`Návod:` *(5) Uvažte hodnotu na Lebesgueově míře. (6) Předpokládejme, že $\Psi(f) = \Upsilon(1)$. Aplikací na Diracovy míry odvoďte, že nutně $f = 1$. Následně ukažte, že $\Psi(1) \neq \Upsilon(1)$. (7) Pro první rovnost použijte výsledek (2).*

Příklad 32. Nechť (X_n) je posloupnost Banachových prostorů.

(1) Ukažte, že $((\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{c_0})^*$ je izometrický $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^1}$ a popište příslušnou izometrii.
(2) Nechť $p \in [1,\infty)$ a $q \in (1,\infty]$ jsou taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Ukažte, že $((\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^p})^*$ je izometrický $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n^*)_{\ell^q}$ a popište příslušnou izometrii.
(3) Nechť $p \in (1,\infty)$. Ukažte, že prostor $(\oplus_{n\in\mathbb{N}} X_n)_{\ell^p}$ je reflexivní, právě když každý z prostorů X_n je reflexivní.

`Návod:` *Použijte metodu důkazu Věty II.21 a Důsledku II.22 z přednášky.*

Příklad 33.

(1) Nechť $(x_n) \in \ell^1$. Ukažte, že funkcionál na c_0 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.21 z přednášky) nabývá své normy, právě když jen konečně mnoho jeho souřadnic je nenulových.
(2) Nechť $(x_n) \in \ell^\infty$. Ukažte, že funkcionál na ℓ^1 reprezentovaný posloupností (x_n) (ve smyslu Věty II.21 z přednášky) nabývá své normy, právě když existuje $m \in \mathbb{N}$, pro které $|x_m| = \|(x_n)\|_\infty$.

Příklad 34. Nechť μ je σ-konečná míra a $f \in L^\infty(\mu)$. Ukažte, že funkcionál na $L^1(\mu)$ reprezentovaný funkcí f (ve smyslu Věty II.23 z přednášky) nabývá své normy, právě když množina $\{x \in \Omega; |f(x)| = \|f\|_\infty\}$ má kladnou míru.

Příklad 35. Nechť K je kompaktní metrický prostor a $\mu \in \mathcal{M}(K,\mathbb{R})$. Ukažte, že funkcionál na $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ reprezentovaný mírou μ (ve smyslu Věty II.27 z přednášky) nabývá své normy, právě když existují disjunktní uzavřené množiny $F_1, F_2 \subset K$ takové, že μ^+ je nesená F_1 a μ^- je nesená F_2 (tj. $\mu^+(K \setminus F_1) = 0$ a $\mu^-(K \setminus F_2) = 0$).

`Návod:` *Pro implikaci $\Leftarrow$ použijte Lemma II.26(b) z přednášky. Pro opačnou implikaci uvažte f, v níž se norma nabývá a ukažte, že lze vzít $F_1 = f^{-1}(1)$ a $F_2 = f^{-1}(-1)$.*