Důkaz Věty II.19 (a něco málo navíc)

Nechť $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Pro $g \in L^q(\mu)$ položme $\Phi_g(f) = \int_\Omega f g \, d\mu$, $f \in L^p(\mu)$

<u>1. krok</u> $\Phi_g \in (L^p(\mu))^*$, $\|\Phi_g\| \le \|g\|_q$, $g \mapsto \Phi_g$ je lineární

$p = 1$, $q = \infty$: $f \in L^1(\mu) \Rightarrow f \cdot g$ měřitelná

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \le \int_\Omega |f| \cdot \|g\|_\infty \, d\mu = \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$$

$\Rightarrow f \cdot g$ integrovatelná; $|\Phi_g(f)| = |\int_\Omega f g \, d\mu| \le \int_\Omega |fg| \, d\mu \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \Phi_g$ dobře def., zřejmě je to lineární funkcionál, $\|\Phi_g\| \le \|g\|_\infty$

Linearita $g \mapsto \Phi_g$ je zřejmá.

$p = \infty$, $q = 1$: analogicky, prohozeno f a g

$p, q \in (1, \infty)$ $\int_\Omega |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \, \|g\|_q$ dle Hölderovy nerovnosti, zbytek analogicky jako výše. ⌋

<u>2. krok</u> Pokud $p \in (1, \infty]$, pak $\|\Phi_g\| = \|g\|_q$ pro $g \in L^q(\mu)$

$p = \infty$, $q = 1$: $g \in L^1(\mu)$ ... pokud $g = 0$, pak $\Phi_g = 0$

$g \ne 0$ ... definuji $f(t) = \begin{cases} \frac{|g(t)|}{g(t)}, & g(t) \ne 0 \\ 0, & g(t) = 0 \end{cases}$

pak f je měřitelná, $|f| \le 1$ všude
$|f| = 1$ na množině kladné míry

$\Rightarrow \|f\|_\infty = 1$

$$\Phi_g(f) = \int_{\{t \in \Omega : g(t) \ne 0\}} |g| \, d\mu = \int_\Omega |g| \, d\mu = \|g\|_1$$

$\Rightarrow \|\Phi_g\| \ge \|g\|_1$, dle 1. kroku platí rovnost.

$p, q \in (1, \infty)$: $\quad g \in L^q(\mu)$, stačí uvažovat $g \neq 0$

Definujme fci $f(t) = \begin{cases} 0 & , g(t) = 0 \\ \dfrac{|g(t)|^q}{g(t) \cdot \|g\|_q^{q-1}} & , g(t) \neq 0 \end{cases}$

Pak f je měřitelná,

$$\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_{\{t: g(t)\neq 0\}} \frac{|g(t)|^{pq}}{|g(t)|^p \, \|g\|_q^{p(q-1)}} d\mu(t) = \qquad \left[p(q-1) = \frac{1}{1-\frac{1}{q}}(q-1) = q \right]$$

$$= \int_{\{t: g(t)\neq 0\}} \frac{|g(t)|^{p(q-1)}}{\|g\|_q^{p(q-1)}} d\mu(t) = \int_{\{t: g(t) \neq 0\}} \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^q} d\mu = 1$$

Tedy $f \in L^p(\mu)$, $\|f\|_p = 1$

$$\Phi_g(f) = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu = \int_\Omega \frac{|g(t)|^q}{\|g\|_q^{q-1}} d\mu = \|g\|_q$$

$\Rightarrow \|\Phi_g\| \geq \|g\|_q$, dle kroku 1 platí rovnost. $\rfloor$

3. krok: Pokud $p = 1$ a μ je σ-konečná, je $\|\Phi_g\| = \|g\|_\infty$

$\lceil$ μ σ-konečná $\Rightarrow$ ex. (A_n) posloupnost měřitelných množin, že $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ a $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$

$g \in L^\infty(\mu)$, $g \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \|g\|_\infty$

$\Rightarrow B := \{t \in \Omega : \|g\|_\infty - \varepsilon \leq |g(t)| \leq \|g\|_\infty\}$ má kladnou míru

Protože $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B \cap A_n)$; existuje $n \in \mathbb{N}$, že $\mu(B \cap A_n) > 0$,

Tedy $0 < \mu(B \cap A_n) < \infty$ $\quad$ Definujme $f(t) = \begin{cases} \dfrac{|g(t)|}{g(t) \, \mu(B\cap A_n)} & , \cancel{g(t) \neq 0} \; t \in B \cap A_n \\ 0 & , g = 0 \end{cases}$

Pak $\cancel{g}$ f je měřitelná,

$$\int_\Omega |\cancel{g}f| d\mu = \int_{B\cap A_n} \frac{1}{\mu(B \cap A_n)} d\mu = 1 \Rightarrow f \in L^1(\mu), \|f\|_1 = 1$$

$$\Phi_g(f) = \int_{B\cap A_n} \frac{|g(t)|}{\mu(B\cap A_n)} d\mu \geq \frac{\|g\|_\infty - \varepsilon}{\mu(B\cap A_n)} \mu(B \cap A_n) = \|g\|_\infty - \varepsilon \Rightarrow \|\Phi_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$$

ε lib. + krok 1

$\Rightarrow \|\Phi_g\| = \|g\|_\infty$

4. Krok: Je-li $p \in [1,\infty)$ a μ konečná, je Φ na

Nechť $\varphi \in (L^p(\mu))^*$

$\boxed{4.1.}$ Pro $A \in \Sigma$ položme $\nu(A) = \varphi(\chi_A)$. Pak ν je σ-aditivní $\mathbb{F}$-hodnotová míra

⌈ ν dobře def: μ konečná $\Rightarrow \chi_A \in L^p(\mu) \Rightarrow \varphi(\chi_A) \in \mathbb{F}$

$$\left(\|\chi_A\|_p^p = \int_\Omega |\chi_A|^p \, d\mu = \mu(A) \right)$$

ν aditivní: $A, B \in \Sigma$ disjunktní

$$\nu(A \cup B) = \varphi(\chi_{A\cup B}) = \varphi(\chi_A + \chi_B) = \varphi(\chi_A) + \varphi(\chi_B) = \nu(A) + \nu(B)$$

ν σ-aditivní: $(A_n)_{n=1}^\infty$ disjunktní posloupnost v Σ.

$N \in \mathbb{N}$: $$\left|\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) - \sum_{n=1}^N \nu(A_n)\right| = \left|\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) - \nu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right|$$

$$= \left|\nu\left(\bigcup_{n=N+1}^\infty A_n\right)\right| = \left|\varphi\left(\chi_{\bigcup_{n=N+1}^\infty A_n}\right)\right| \le \|\varphi\| \cdot \left\|\chi_{\bigcup_{n=N+1}^\infty A_n}\right\|_p =$$

$$= \|\varphi\| \cdot \left(\mu\left(\bigcup_{n>N} A_n\right)\right)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \left(\sum_{n=N+1}^\infty \mu(A_n)\right)^{1/p} \xrightarrow{N\to\infty} 0,$$

protože μ je σ-aditivní a konečná, tedy řada $\sum \mu(A_n)$ konverguje. ⌋

$\boxed{4.2}$ $\nu \ll \mu$ $\quad (\mu(A) = 0 \Rightarrow \chi_A = 0$ μ-s.v. $\Rightarrow \nu(A) = \varphi(\chi_A) = 0)$

Tedy z Radon-Nikodýmovy věty plyne existence $g \in L^1(\mu)$,

že $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$, $A \in \Sigma$.

Dále chceme ukázat, že $g \in L^q(\mu)$ a $\varphi = \Phi g$.

$\boxed{4.3}$ $\forall f \in L^\infty(\mu): \varphi(f) = \int_\Omega f g \, d\mu$

[Dle $\boxed{4.2}$ to platí pro $f = \chi_A$, $A \in \Sigma$. Tedy díky linearitě platí pro f jednoduchou měřitelnou.

Dále uvažme $\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$, $f \in L^\infty(\mu)$. Pak $\tilde{\varphi} \in (L^\infty(\mu))^*$

(μ konečná $\Rightarrow$ $\forall f \in L^\infty(\mu)$: $f \in L^p(\mu)$, tedy $\tilde{\varphi}$ je dobře def.

$$|\tilde{\varphi}(f)| \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_p = \|\varphi\| \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} \leq \|\varphi\| \left(\int_\Omega \|f\|_\infty^p d\mu\right)^{1/p} = \|\varphi\| \cdot \mu(\Omega)^{1/p} \cdot \|f\|_\infty)$$

Dále $\Phi_g \in (L^\infty(\mu))^*$ dle kroku 1

Tedy $\Phi_g(f) = \tilde{\varphi}(f)$ pro jednoduché funkce. Protože jednoduché funkce jsou husté v $L^\infty(\mu)$, je $\Phi_g = \tilde{\varphi}$ na $L^\infty(\mu)$. A hotovo]

$\boxed{4.4}$ $\forall f \in L^p(\mu)$: $fg \in L^1(\mu)$ a $\varphi(f) = \int_\Omega f g \, d\mu$

[$f \in L^p(\mu)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $f_n := f \cdot \chi_{\{t \in \Omega : |f(t)| \leq n\}}$

Pak $f_n \in L^\infty(\mu)$ $\quad (\|f_n\|_\infty \leq n)$ a $f_n \to f$ v normě $L^p(\mu)$

($|f_n - f|^p \to 0$ μ-s.v.
$|f_n - f|^p \leq |f|^p$, tedy z Lebesgueovy věty
$\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \to 0$)

Definujme $h(t) = \begin{cases} \frac{|g(t)|}{g(t)}, & g(t) \neq 0 \\ 0 & g(t) = 0 \end{cases}$

Pak $\int_\Omega |f_n g| d\mu = \int_\Omega |f_n| \cdot h \cdot g \, d\mu = |\varphi(|f_n| \cdot h)| \leq \|\varphi\| \cdot \| |f_n| \cdot h \|_p \leq$
$\leq \|\varphi\| \cdot \|f_n\|_p \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_p$

Protože $|f_n g| \nearrow |fg|$, z Leviho věty $\int_\Omega |fg| d\mu = \lim \int_\Omega |f_n g| d\mu \leq \|\varphi\| \|f\|_p$

Tedy: $\forall f \in L^p(\mu)$: $fg \in L^1(\mu)$ & $\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|\varphi\| \cdot \|f\|_p$

Dále: $f_n \to f$ v $L^p(\mu) \Rightarrow \varphi(f_n) \to \varphi(f)$

$\Rightarrow \varphi(f) = \lim_{n\to\infty} \varphi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n g \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu$ (Lebesgueova věta, $|fg|$ je majoranta)

$\boxed{4.5}$ $g \in L^q(\mu)$

Γ $p \in (1,\infty)$ ... $g_n := g \cdot \chi_{\{t\in\Omega : |g(t)|\le n\}}$

$\Rightarrow g_n \in L^\infty(\mu) \subset L^q(\mu)$

Definujme fci $f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{|g_n(t)|^q}{g_n(t)\,\|g_n(t)\|_q^{q-1}}, & g_n(t) \neq 0 \\ 0, & g_n(t) = 0 \end{cases}$

Pak $f_n \in L^p(\mu)$, $\|f_n\|_p = 1$ (viz výpočet v kroku 2)

Tedy $\|\varphi\| \ge |\varphi(f_n)| = \left|\int_\Omega f_n\, g\, d\mu\right| = \int_\Omega f_n\, g_n\, d\mu = \|g_n\|_q$

(viz výpočet v kroku 2)

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|g_n\|_q \le \|\varphi\|$

$|g_n|^q \nearrow |g|^q \Rightarrow$ z Leviho věty $\|g\|_q \le \|\varphi\|$ $\dashv$

Krok 5: Je-li $p \in [1,\infty)$ a μ je σ-konečná, pak Φ je na

Γ μ σ-konečná $\Rightarrow$ ex. $(A_n)_{n=1}^\infty$ posloupnost měřitelných množin, že $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ a $\forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) < \infty$

BÚNO A_n jsou po dvou disjunktní!

$\varphi \in (L^p(\mu))^*$

pro $n \in \mathbb{N}$: $f \in L^p(A_n) \Rightarrow f$ lze doplnit nulou na $\Omega \setminus A_n$, pak to bude prvek $L^p(\mu)$, definujeme

$\varphi_n(f) = \varphi(f)$, $f \in L^p(A_n)$ $\Rightarrow \varphi_n \in (L^p(A_n))^*$, $\|\varphi_n\| \le \|\varphi\|$

Dle kroku 4 existuje $g_n \in L^q(A_n)$, že $\varphi_n(f) = \int_{A_n} f\, g_n\, d\mu$, $f \in L^p(A_n)$

Definujme fci $g : \Omega \to \mathbb{F}$ předpisem

$g(t) = g_n(t)$ pro $t \in A_n$

Tvrdím, že $g \in L^q(\mu)$ a $\Phi_g = \varphi$

$g \in L^q(\mu)$

$p = 1$: $\|g_n\|_\infty = \|\varphi_n\| \leq \|\varphi\|$ (krok 3)

$\Rightarrow \|g\|_\infty \leq \|\varphi\| \Rightarrow g \in L^\infty(\mu)$

$p \in (1, \infty)$ $h_n := g \cdot \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n}$

Pak $h_n \in L^q(A_1 \cup \dots \cup A_n)$, $\|h_n\|_q = \left(\sum_{j=1}^n \|g_j\|_q^q \right)^{1/q}$

A zároveň dle kroku 2 je $\|h_n\|_q = \|\Phi_{h_n}\|$, přičemž

$$\Phi_{h_n}(f) = \int_\Omega h_n f \, d\mu = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} g_j f \, d\mu = \sum_{j=1}^n \varphi_j (f \restriction A_j) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \varphi(f \cdot \chi_{A_j}) = \varphi(f \cdot \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n})$$

Tedy $|\Phi_{h_n}(f)| = |\varphi(f \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n})| \leq \|\varphi\| \, \|f \chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n}\|_p \leq \|\varphi\| \, \|f\|_p$

$\Rightarrow \|\Phi_{h_n}\| \leq \|\varphi\|$

$\Rightarrow \|h_n\|_q \leq \|\varphi\|$, tedy $\|h\|_q = \left(\sum_{j=1}^\infty \|g_j\|_q^q \right)^{1/q} \leq \|\varphi\|$

$\Phi_g = \varphi$ $\quad f \in L^p(\mu)$

$\Rightarrow \|f\|_p^p = \sum_{j=1}^\infty \|f \chi_{A_j}\|_p^p$, tedy řada konverguje

Odsud plyne, že $f = \sum_{j=1}^\infty f \cdot \chi_{A_j}$ v normě prostoru $L^p(\mu)$

Tedy $\varphi(f) = \sum_{j=1}^\infty \varphi(f \cdot \chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^\infty \Phi_g(f \cdot \chi_{A_j}) = \Phi_g(f)$.

Krok 6: Je-li $p \in (1,\infty)$, je Φ na pro libovolnou míru

$\lceil$ Nechť $\varphi \in L^p(\mu)^*$

$\mathcal{A} \subset \Sigma$ buď maximální systém s vlastnostmi

- $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ různé $\Rightarrow \mu(A_1 \cap A_2) = 0$
- $\mu(A) < \infty$ pro $A \in \mathcal{A}$
- $\varphi(\chi_A) \neq 0$ pro $A \in \mathcal{A}$.

Jeho existence plyne z Zornova lemmatu.

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je spočetný. Pro $m, n \in \mathbb{N}$ definujme
$$\mathcal{A}_{m,n} = \{ A \in \mathcal{A} : \mu(A) \leq m \ \& \ |\varphi(\chi_A)| \geq \tfrac{1}{n} \}$$
Pak $\mathcal{A} = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{m,n}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}_{m,n}$ je konečný. Pak snadno uvidíme, že $\mathcal{A}$ je spočetný.

$A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}_{m,n}$ různé. Zvolme $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $|\alpha_j| = 1$, aby $\alpha_j \cdot \varphi(\chi_{A_j}) = |\varphi(\chi_{A_j})|$

$$f := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot \chi_{A_j}. \quad \text{Pak } \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) \right)^{1/p} \leq (km)^{1/p}$$

Tedy $\|\varphi\| \cdot (km)^{1/p} \geq \|\varphi\| \cdot \|f\|_p \geq |\varphi(f)| = \left| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi(\chi_{A_j}) \right| =$
$$= \sum_{j=1}^{k} |\varphi(\chi_{A_j})| \geq \frac{k}{n}$$

Tedy: $k^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\| \cdot n \cdot m^{1/p}$ $\qquad \left(1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}\right)$

$k \leq \|\varphi\|^q n^q m^{q/p}$

Tedy $\mathcal{A}_{m,n}$ má nejvýše $\|\varphi\|^q n^q m^{q/p}$ prvků.

Tedy opravdu je $\mathcal{A}$ spočetný $\Rightarrow$ $\Omega_0 = \bigcup \mathcal{A}$ je měřitelná, $\mu|\Omega_0$ je σ-konečná a navíc
$$\forall f \in L^p(\mu): \ \varphi(f) = \varphi(f \cdot \chi_{\Omega_0})$$

[Protože, pokud $f = 0$ s.v. na Ω_0, pak $\varphi(f) = 0$ — to platí pro jednoduché funkce z definice $\mathcal{A}$, a jednoduché funkce jsou hustá v L^p]

Dle kroku 5 ex. $g \in L^q(\Omega_0)$, že pokud dodefinujeme 0 na $\Omega \setminus \Omega_0$, pak $\Phi g = \varphi$. $\rfloor$