Důkaz Věty II.2.1 (Rieszova věta o reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)
$\varphi : C(K,\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ nezáporný lineární funkcionál

1. krok φ je spojitý a $\|\varphi\| = \varphi(1)$.

$\ulcorner$ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ... $f \in C(K,\mathbb{R}) \Rightarrow \forall x \in K : -\|f\|_\infty \le f(x) \le \|f\|_\infty$

φ nezáporný $\Rightarrow$

$$\underset{-\|f\|_\infty \varphi(1)}{\underset{\|}{\varphi(-\|f\|_\infty)}} \le \varphi(f) \le \underset{\varphi(1)\cdot\|f\|_\infty}{\underset{\|}{\varphi(\|f\|_\infty)}}$$

$$\Rightarrow |\varphi(f)| \le \|f\|_\infty \cdot \varphi(1)$$

Tedy $\|\varphi\| \le \varphi(1)$

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ... $f \in C(K,\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C},\ |\alpha| = 1,\ |\varphi(f)| = \alpha \cdot \varphi(f)$

Jest: $|\varphi(f)| = \alpha\varphi(f) = \varphi(\alpha f) = \varphi(\mathrm{Re}\,\alpha f + i\,\mathrm{Im}\,\alpha f)$
$= \varphi(\mathrm{Re}\,\alpha f) + i\varphi(\mathrm{Im}\,\alpha f) = \varphi(\mathrm{Re}\,\alpha f)$
$\le \|\mathrm{Re}\,\alpha f\|_\infty \cdot \varphi(1) \le \|\alpha f\|_\infty \cdot \varphi(1) = \|f\|_\infty \cdot \varphi(1)$

(použili jsme: φ nezáporný $\Rightarrow \varphi(C(K,\mathbb{R})) \subset C(K,\mathbb{R})$ a případ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)
Opět tedy $\|\varphi\| \le \varphi(1)$

Rovnost plyne z toho, že $\|1\|_\infty = 1$ $\lrcorner$

2. krok Pro $U \subset K$ otevřenou položme $\mu(U) = \sup\{\varphi(f) : f : K \to [0,1]$ spoj. $\operatorname{spt} f \subset U\}$

Pak platí:
(i) $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(K) = \varphi(1) < \infty$
(ii) $U \subset V \Rightarrow \mu(U) \le \mu(V)$
(iii) $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \mu(U \cup V) = \mu(U) + \mu(V)$
(iv) (U_n) posloupnost otevřených množin $\Rightarrow \mu(\bigcup_n U_n) \le \sum_n \mu(U_n)$

$\ulcorner$ (i) a (ii) je snadné

(iii) $f : K \to [0,1]$ spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U \cup V \Rightarrow f_1 := f \cdot \chi_U,\ f_2 := f \cdot \chi_V$
jsou spojité $\varphi(f) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2) \le \mu(U) + \mu(V)$
odtud $\mu(U \cup V) \le \mu(U) + \mu(V)$
$\ge$: $\varepsilon > 0$ ... ex. $f_1, f_2 : K \to [0,1]$ spoj., $\operatorname{spt} f_1 \subset U$, $\operatorname{spt} f_2 \subset V$
$\varphi(f_1) > \mu(U) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\varphi(f_2) > \mu(V) - \frac{\varepsilon}{2}$
$\Rightarrow \varphi(f_1 + f_2) > \mu(U) + \mu(V) - \varepsilon$, $\operatorname{spt}(f_1 + f_2) \subset U \cup V$, má hodnoty v $[0,1]$
$\Rightarrow \mu(U \cup V) > \mu(U) + \mu(V) - \varepsilon$

(iv) $U := \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Nechť $f: K \to [0,1]$, je spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U$.

$\operatorname{spt} f$ kompaktní $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: \operatorname{spt} f \subset U_1 \cup \dots \cup U_N$.

Dle lemmatu 26(c) ex. $h, f_1, \dots, f_N : K \to [0,1]$ spojité,
že $\operatorname{spt} h \subset K \setminus \operatorname{spt} f$
$\operatorname{spt} f_j \subset U_j \quad j = 1, \dots N$
a $h + \sum_{j=1}^{N} f_j = 1$ na K

Tedy $\sum_{j=1}^{N} f_j = 1$ na $\operatorname{spt} f$, tedy $f = \sum_{j=1}^{N} f_j f$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(f_j f) \le \sum_{j=1}^{N} \mu(U_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$$

Přechodem k supremu: $\mu(U) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(U_j)$ $\lrcorner$

3. krok Pro $A \subset K$ libovolnou položme

$$\mu^*(A) = \inf \{\mu(U) : U \supset A, U \text{ otevřená}\}$$

Platí: (v) $\mu^*(\emptyset) = 0$, $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$
(vi) $\mu^*(U) = \mu(U)$ pro U otevřenou
(vii) (A_n) posl. podmnožin $K \Rightarrow \mu^*(\bigcup_n A_n) \le \sum \mu^*(A_n)$

$\ulcorner$ (v) a (vi) jasné z (i) a (ii).

(vii) $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ ex. $U_n \supset A_n$ otevřená, $\mu(U_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

$U := \bigcup_n U_n$. pak U je otevřená, $U \supset \bigcup_n A_n$

$$\text{a } \mu(U) \underset{\text{dle (iv)}}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon$$

Tedy $\mu^*(A) \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)\right) + \varepsilon$

protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, je důkaz hotov $\lrcorner$

4. krok $A\subset K$ libovolná, $U\subset K$ otevřená $\Rightarrow \mu^*(A)=\mu^*(A\cap U)+\mu^*(A\setminus U)$

⌈ $\le$ plyne z (vii), stačí tedy dokázat $\ge$:

$\varepsilon>0$ libovolné $\Rightarrow \exists\, V\supset A$ otevřená, že $\mu(V)<\mu^*(A)+\varepsilon$

Dále zvolme $f: K\to[0,1]$ spoj., $\operatorname{spt} f\subset U\cap V$, že $\varphi(f)>\mu(U\cap V)-\varepsilon$

a dle Lem. 26(a) najdeme W otevřenou, že $\operatorname{spt} f\subset W\subset\overline{W}\subset U\cap V$

Pak $\mu(W)\ge\varphi(f)>\mu(U\cap V)-\varepsilon$

Dále $V\setminus\overline{W}\supset A\setminus U$, tedy $\mu^*(A\setminus U)\le\mu(V\setminus\overline{W})$

↑ otevřená množina

Tedy: $\mu^*(A\cap U)+\mu^*(A\setminus U)\le\mu(U\cap V)+\mu(V\setminus\overline{W}) <$

$<\varphi(f)+\varepsilon+\mu(V\setminus\overline{W})\le\mu(W)+\varepsilon+\mu(V\setminus\overline{W})$

$\overset{(iii)}{=}\mu(W\cup(V\setminus\overline{W}))+\varepsilon\overset{(ii)}{\le}\mu(V)+\varepsilon<\mu^*(A)+2\varepsilon$

ε libovolné $\Rightarrow \mu^*(A\cap U)+\mu^*(A\setminus U)\le\mu^*(A)$, a je to. ⌋

5. krok Dle kroku 3 je μ^* vnější míra. Dle kroku 4 jsou otevřené množiny měřitelné v Carathéodoryově smyslu. Protože σ-algebra generovaná otevřenými množinami je borelovská σ-algebra, z Carathéodoryho věty plyne, že μ^* zúžená na borelovské množiny je σ-aditivní míra. Protože μ^* je konečná, z definice μ^* a (vi) plyne, že tato míra je regulární. Označme ji μ.

Zbývá ukázat, že $\varphi(f)=\int_K f\,d\mu$, $f\in C(K,\mathbb{F})$

stačí to dokázat pro $f\in C(K,\mathbb{R})$ ($f=\operatorname{Re} f+i\operatorname{Im} f$)

Navíc stačí $\forall f\in C(K,\mathbb{R})$ platí $\varphi(f)\le\int_K f\,d\mu$
(aplikují na f a $-f$ dostaneme rovnost)

protože $\varphi(1)=\mu(K)=\int_K 1\,d\mu$ a každá $f\in C(K,\mathbb{R})$ je omezená,
stačí nerovnost dokázat pro $f\ge 0$

6. krok: Starczy tg. dowieść $\forall f: K \to [0,1]$ ciągłej

$$\varphi(f) \leq \int_K f\, d\mu$$

Oznaczmy $E_i = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)\right)$, $i = 1, \dots, n+1$

$\Rightarrow$ E_i borelowskie, rozłączne, pokrywają K

Wybierzmy $U_i \supset E_i$ otwarte, że $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{1}{n^2}$

a ponadto $U_i \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right)$

$\left[\right.$ $E_i \subset f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right)$, $f^{-1}\left(\left[0, \frac{i}{n}\right)\right)$ otwarty,

także korzystając regularności μ. $\left.\right]$

Tak $U_1 \cup \dots \cup U_{n+1} = K \Rightarrow$ dla Lematu 2.6 (c) $\exists$

$g_1, \dots, g_{n+1}: K \to [0,1]$ ciąg., $\operatorname{supp} g_j \subset U_j$, $\sum g_j = 1$ na K

Tak
$$\varphi(f) = \sum_{j=1}^{n+1} \varphi(g_j f) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \varphi\left(g_j \cdot \frac{j}{n}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n} \varphi(g_j)$$

φ nieujemny, $f \leq \frac{j}{n}$ na U_j

$$\leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n} \mu(U_j) \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n}\left(\mu(E_j) + \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j-1}{n} \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{n} \mu(E_j) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{j}{n^3}$$

$$\leq \int_K f\, d\mu + \underbrace{\frac{1}{n}\mu(K) + \frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{n^3}}_{\to 0 \text{ przy } n \to \infty}$$

$$\Rightarrow \varphi(f) \leq \int_K f\, d\mu$$

7. krok Jednoznačnost μ:

Nechť ν je jiná míra, která splňuje totéž:

U otevřená, $f: K \to [0,1]$ spojitá, $\operatorname{spt} f \subset U$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \int_K f \, d\nu \leq \int_K \chi_U \, d\nu = \nu(U)$$

Tedy $\mu(U) \leq \nu(U)$

Obráceně: U otevřená, $\varepsilon > 0$. Z regularity ν exist. $F \subset U$ uzavřená, $\nu(F) > \nu(U) - \varepsilon$

Dle Lemmatu 22(5) ex. $f: K \to [0,1]$ spojitá $f|F = 1$, $\operatorname{spt} f \subset U$

$$\text{Pak} \quad \mu(U) \geq \varphi(f) = \int_K f \, d\nu \geq \nu(F) > \nu(U) - \varepsilon$$

Tedy $\mu = \nu$ na otevřených množinách. Z regularity plyne, že $\mu = \nu$ na borelovských množinách.