Tvrzení 24: Nechť X je NLP, $Y \subset\subset X$, (y_n) posloupnost v Y a $y \in Y$.
Pak: $y_n \xrightarrow{w} y$ v $Y \Rightarrow y_n \xrightarrow{w} y$ v X

Důkaz: $\Rightarrow$: Nechť $y_n \xrightarrow{w} y$ v Y. Ukážeme, že $y_n \xrightarrow{w} y$ v X.
Vezmeme $f \in X^*$ libovolné. Pak $f|_Y \in Y^*$.
Tedy $f|_Y(y_n) \to f|_Y(y)$. Ale to znamená, že $f(y_n) \to f(y)$.
Protože $f \in X^*$ bylo libovolné, dostáváme $y_n \xrightarrow{w} y$ v X.

$\Leftarrow$: Nechť $y_n \xrightarrow{w} y$ v X. Ukážeme, že $y_n \xrightarrow{w} y$ v Y.
Vezměme libovolné $f \in Y^*$. Z H-B věty plyne,
že existuje $g \in X^*$ splňující $g|_Y = f$.
Pak $g(y_n) \to g(y)$. Protože $g|_Y = f$ a $y_n, y \in Y$,
dostaneme $f(y_n) \to f(y)$. Protože $f \in Y^*$ bylo libovolné,
platí $y_n \xrightarrow{w} y$ v Y.

Tvrzení 25: Nechť X je NLP
(a) Je-li (x_n) posloupnost v X a $x_n \xrightarrow{w} x$, pak
$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

(b) Je-li (f_n) posloupnost v X^* a $f_n \xrightarrow{w^*} f$, pak
$$\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|.$$

Důkaz: (a) Nechť $x_n \xrightarrow{w} x$. Podle duálního vyjádření normy existuje $f \in X^*$ splňující $\|f\| \leq 1$ a $f(x) = \|x\|$

Pak
$$\|x\| = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \Big|\lim_{n\to\infty} f(x_n)\Big| =$$
rovná se to $\|x\| \geq 0$
$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f(x_n)|}_{\leq \|x_n\| \text{ neomezen}} \leq \liminf \|x_n\|$$

(b) Nechť $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

Zvolme $x \in B_X$ libovolné. Pak $f_n(x) \to f(x)$, a tedy

$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \|f_n\| \text{ pro každé } n.} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$$

Tedy: $\forall x \in B_X: \quad |f(x)| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$

Proto $\quad \underset{\sup_{x\in B_X} |f(x)|}{\overset{\|}{\|f\|}} \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$

Tvrzení 26 (Mazurova věta): Nechť X je NLP, $x_n \xrightarrow{w} x$ v X.
Pak existuje posloupnost (y_n) taková, že
- $\forall n \in \mathbb{N}$: y_n je konvexní kombinací nějakých prvků posloupn. (x_k)
- $y_n \to x$ (silně)

Důkaz: Nechť $A := \operatorname{co}\{x_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ (= konvexní obal množiny členů posloupnosti (x_n))

Tvrzení říká, že $x \in \overline{A}$.
Dokážeme sporem. Nechť $x \notin \overline{A}$.
Pak $\overline{A}$ je uzavřená konvexní množina, $\{x\}$ je kompaktní konvexní množina a tyto dvě množiny jsou disjunktní.
Tedy podle oddělovací H-B věty (Věta 11)
existuje $f \in X^*$ a $c, d \in \mathbb{R}$, že
$\forall y \in A: \quad \boxed{\operatorname{Re} f(x) \leq c} < d \leq \operatorname{Re} f(y)$.
Protože $x_n \in A$ pro každé n, je $\forall n \in \mathbb{N}$ $\operatorname{Re} f(x_n) \geq d$.
Protože $x_n \xrightarrow{w} x$, je $f(x_n) \to f(x)$, tedy i $\operatorname{Re} f(x_n) \to \operatorname{Re} f(x)$. Proto
$\boxed{\operatorname{Re} f(x) \geq d}$, což je spor.