III. Omezené lineární operátory

III.1 Kvocienty a faktorizace omezených operátorů

Tvrzení 1 (kvocient normovaného lineárního prostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Z je jeho uzavřený podprostor. Definujme na X ekvivalenci $\sim$ vztahem $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Z$. Pro $x \in X$ označme symbolem $[x]$ třídu ekvivalence obsahující bod x, tj.*

$$[x] = \{y \in X; y - x \in Z\} = x + Z.$$

Dále položme

$$X/Z = \{[x]; x \in X\}$$

a definujme na X/Z operace

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda \cdot [x] = [\lambda x] \quad \text{pro } x, y \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{F}.$$

Dále pro $x \in X$ položme

$$\|[x]\|_{X/Z} = \inf\{\|y\|; y \in [x]\}.$$

Pak platí:

(a) *Operace na X/Z jsou dobře definovány a X/Z s těmito operacemi tvoří vektorový prostor.*
(b) *Pro každé $x \in X$ platí $\|[x]\|_{X/Z} = \operatorname{dist}(0, [x]) = \operatorname{dist}(x, Z)$.*
(c) *$\|\cdot\|_{X/Z}$ je norma na X/Z, $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ je tedy normovaný lineární prostor.*
(d) *Je-li X úplný, je i $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ úplný.*

Poznámka: Prostor $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$ se nazývá **kvocient** X **podle** Z nebo též **faktorprostor** X **podle** Z. Obvykle píšeme jen X/Z místo $(X/Z, \|\cdot\|_{X/Z})$. Zobrazení $q : x \mapsto [x]$ nazýváme **kanonické kvocientové zobrazení** X **na** X/Z.

Větička 2. *Nechť q je kanonické kvocientové zobrazení X na X/Z. Pak q je lineární a splňuje $q(U_X) = U_{X/Z}$. Speciálně, $\|q\| \leq 1$.*

Tvrzení 3 (faktorizace lineárního operátoru). *Nechť X a Y jsou normované lineární prostory a $T \in L(X, Y)$.*

(a) *Nechť $Z \subset\subset \ker T$ je uzavřený podprostor. Pak existuje právě jedno $\widetilde{T} \in L(X/Z, Y)$ takové, že $T = \widetilde{T}q$, kde q je kanonické kvocientové zobrazení X na X/Z. Zobrazení $\widetilde{T}$ splňuje $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*
(b) *Je-li $Z = \ker T$, je zobrazení $\widetilde{T}$ z bodu (a) navíc prosté.*

Poznámka: Pokud je operátor $\widetilde{T}$ z Tvrzení 3(b) izometrie $X/\ker T$ na Y, pak se operátor T obvykle nazývá **kvocientový**. Z Větičky 2 pak plyne, že T je kvocientový, právě když $T(U_X) = U_Y$. Pokud platí $T(B_X) = B_Y$, platí i $T(U_X) = U_Y$, a tedy operátor T je kvocientový. Na druhou stranu, kvocientový operátor nemusí splňovat $T(B_X) = B_Y$.

Větička 4 (kvocient Hilbertova prostoru). *Nechť H je Hilbertův prostor a Z jeho uzavřený podprostor. Pak H/Z je rovněž Hilbertův prostor. Navíc, pokud q je kanonické kvocientové zobrazení, pak q zobrazuje ortogonální doplněk $Z^\perp$ izometricky na H/Z.*

Značení: Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Je-li $A \subset X$, označme
$$A^\perp = \{f \in X^*; \forall x \in A : f(x) = 0\}.$$
- Je-li $B \subset X^*$, označme
$$B_\perp = \{x \in X; \forall f \in B : f(x) = 0\}.$$

Poznámky: (1) Je-li X prostor se skalárním součinem, pak symbolem $A^\perp$ se může značit buď ortogonální doplněk (jde tedy o podprostor X) nebo podprostor X^* dle výše uvedené definice. Kterou možnost máme na mysli, vyplyne z kontextu.

(2) Nechť H je Hilbertův prostor a $I : H \to H^*$ je sdruženě lineární izometrie daná Větou II.15. Pro $A \subset H$ nechť B_1 je ortogonální doplněk A v H (tj. $B_1 = A^\perp$ dle definice z oddílu I.5) a $B_2 = A^\perp$ ve smyslu definice z tohoto oddílu Pak $B_2 = I(B_1)$.

Věta 5 (dualita podprostorů a kvocientů). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Z jeho uzavřený podprostor.*

(a) *Nechť $q : X \to X/Z$ je kanonické kvocientové zobrazení. Pak zobrazení $T : (X/Z)^* \to X^*$ definované vzorcem $T(f) = f \circ q$ je izometrie $(X/Z)^*$ na $Z^\perp$.*

(b) *Zobrazení $R : f \mapsto f|_Z$ je kvocientové zobrazení X^* na Z^*, jehož jádro je $Z^\perp$. Tedy zobrazení $\widetilde{R}$ z Tvrzení 3(b) je izometrie $X^*/Z^\perp$ na Z^*.*

Tvrzení 6. *Kvocient reflexivního prostoru je opět reflexivní prostor.*

Věta 7 (univerzalita $\ell^\infty(\Gamma)$ a $\ell^1(\Gamma)$).

(a) *Každý Banachův prostor je izometrický uzavřenému podprostoru $\ell^\infty(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ. Separabilní Banachův prostor je izometrický podprostoru ℓ^∞.*

(b) *Každý Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru $\ell^1(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ. Separabilní Banachův prostor je izometrický nějakému kvocientu prostoru ℓ^1.*