III.3 Projekce a topologické doplňky

Poznámky:

- Nechť X je vektorový prostor a $Y, Z \subset X$ jsou podprostory takové, že $Y \cap Z = \{\boldsymbol{o}\}$ a $Y + Z = X$. Pak pro každé $x \in X$ existuje právě jedna dvojice bodů $y \in Y$ a $z \in Z$ taková, že $x = y + z$. Lze tedy definovat dvojici zobrazení $P : X \to Y$ a $Q : X \to Z$ tak, že $x = Px + Qx$ pro každé $x \in X$.
  - P a Q jsou lineární zobrazení, navíc jsou to projekce; $PX = Y$, $\ker P = Z$, $QX = Z$, $\ker Q = Y$.
  - P se nazývá **projekce na** Y **podél** Z.
  - Podprostor Z se nazývá **algebraický doplněk** podprostoru Y.
- Nechť X je vektorový prostor a $Y \subset X$ je podprostor. Pak existuje algebraický doplněk podprostoru Y. Speciálně, existuje lineární projekce X na Y.

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je podprostor X.

- Nechť Z je nějaký algebraický doplněk podprostoru Y. Říkáme, že Z je **topologický doplněk** podprostoru Y, pokud projekce X na Y podél Z je spojitá.
- Říkáme, že podprostor Y je **komplementovaný** (nebo **doplňkový**), pokud existuje jeho topologický doplněk.

Poznámka: Komplementovaný podprostor je vždy uzavřený. Topologický doplněk je rovněž vždy uzavřený. Pokud Z je topologický doplněk Y, pak Y je topologický doplněk Z.

Věta 14 (topologické doplňky v Banachových prostorech). *Nechť X je Banachův prostor, Y jeho uzavřený podprostor a Z nějaký algebraický doplněk podprostoru Y. Pak Z je topologický doplněk Y, právě když Z je uzavřený.*

Větička 15. *Nechť H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak Y je komplementovaný, topologickým doplňkem je například ortogonální doplněk $Y^{\perp}$.*

Poznámka: Je-li X Banachův prostor a každý jeho uzavřený podprostor je komplementovaný, pak X je izomorfní Hilbertovu prostoru. Tato netriviální věta byla dokázána J. Lindenstraussem a L. Tzafririm v roce 1971.

Tvrzení 16 (komplementovanost podprostoru konečné dimenze). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ podprostor konečné dimenze. Pak Y je komplementovaný.*

Tvrzení 17 (komplementovanost podprostoru konečné kodimenze). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y \subset X$ uzavřený podprostor takový, že kvocient X/Y je konečné dimenze. Pak Y je komplementovaný.*

Poznámka: Dimenze kvocientu X/Y se nazývá **kodimenze** Y v X.

Tvrzení 18 (jádro lineárního funkcionálu). *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^* \setminus \{\boldsymbol{o}\}$. Pak $\ker f$ je uzavřený podprostor X kodimenze jedna. Speciálně platí, že $\ker f$ je komplementovaný podprostor X.*